

Брянский государственный технический университет

На правах рукописи

ОЛЬШЕВСКИЙ Александр Алексеевич

**МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТЕЛ
ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ
ПОВЕРХНОСТИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ**

**Специальность 01.02.06 – Динамика, прочность машин,
приборов и аппаратуры**

**Диссертация на соискание ученой степени
кандидата технических наук**

**Научный руководитель
доктор технических наук,
профессор Сакало В.И.**

Брянск 2003

Введение	5
ГЛАВА 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНТАКТА	8
1.1. Основные параметры шероховатости поверхности и способы их определения 8	
1.2. Контактные задачи и методы их решения	12
ГЛАВА 2. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ.....	25
2.1. Построение базовых моделей.....	25
2.1.1. Получение информации о микрорельефе поверхностей.....	25
2.1.2. Формирование базовых моделей.....	29
2.1.3. Краевые условия	33
ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ.....	37
3.1. Тестирование алгоритмов решения нормальной контактной задачи в упругой постановке	37
3.2. Построение силовых характеристик шероховатого слоя при решении задачи в упругой постановке	38
3.3. Методика решения упруго-пластической задачи	44
3.3.1. Способы учета пластических деформаций в задачах статики	44
3.3.2. Основные гипотезы и соотношения теории течения	46

3.3.3. Алгоритм решения упруго-пластической задачи методом конечных элементов	52
3.4. Тестирование алгоритмов решения задач статики в упруго-пластической постановке	54
3.4.1. Растяжение полосы с V-образным надрезом	54
3.4.2. Моделирование испытания на твердость по методу Бринеля	55
3.5. Построение силовых характеристик шероховатого слоя при решении задачи в упруго-пластической постановке	58
3.6. О характере распределения пятен контакта	61
ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНТАКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ	73
4.1. Краевые условия	73
4.2. Построение силовых характеристик шероховатого слоя при решении задачи в упругой постановке	74
ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЕСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНТАКТА	80
5.1. Некоторые особенности конструкции колеса дифференциального вращения	80
5.2. Решение нормальной контактной задачи для зоны внутреннего контакта	83
ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ	86
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	88

ПРИЛОЖЕНИЯ	97
П1 Результаты решения контактной задачи в упругой постановке с использованием базовых моделей	98
П2 Результаты решения контактной задачи в упруго-пластической постановке с использованием базовых моделей.....	109

Введение

Контактная задача является одной из наиболее сложных в математическом отношении задач теории упругости. Вместе с тем, именно с ней часто приходится сталкиваться при расчете самых разных объектов - зубьев зубчатых колес, катков различных геометрических форм, деталей подшипников и подпятников, опорных частей мостов, колес подвижного состава, инструмента, приспособлений и т.д. Именно поэтому решению контактных задач уже довольно длительное время уделяется пристальное внимание, как следствие, теоретическим основам решения задач этого класса посвящено много работ [1, 4, 9, 10, 18, 40, 41, 43, 85, 102, 111 и др.].

Многие эксплуатационные свойства машин - износостойкость, контактная жесткость, усталостная прочность, коррозионная стойкость, электро- и теплосопротивление контактов, герметичность соединений и другие - в большой мере определяются контактным взаимодействием деталей [53]. Параметры этого процесса тесно связаны с геометрическими параметрами сопрягаемых поверхностей и физико-механическими и химическими свойствами материалов деталей.

Контактные задачи принято разделять на нормальные и касательные (тангенциальные). «Нормальная» задача подразумевает случай нагружения тел силой, действующей по нормали к поверхностям, проведенной через начальную точку контакта. Если в контакте действуют не только нормальные силы, но и касательные, задача носит название тангенциальной.

Первое строгое решение нормальной контактной задачи для твердых упругих сплошных тел предложил Герц [10]. При получении этого решения был принят ряд упрощений и допущений, среди которых одним из существенных является допущение о том, что поверхности контактирующих тел являются идеально гладкими. На основе решения Герца строится целое направление в технических расчетах, однако поверхности деталей машин, полученные различными способами формообразования – литьем, ковкой, штамповкой, резанием, шлифовкой и т.д. – не являются идеально гладкими, всегда имеют шероховатость (микронеровности), а иногда и волнистость и отклонения от правильной

геометрической формы. В результате этого контакт сопрягаемых поверхностей всегда носит дискретный характер, а действительная площадь контакта оказывается меньше номинальной площади, которая является основой для конструкторских расчетов. Для методов обработки, широко применяемых в машиностроении (фрезерование, точение, шлифование), фактическая площадь контакта при первичном взаимодействии деталей машин обычно не превышает 25-30% номинальной, а в некоторых случаях составляет лишь 5-10% [89]. Это приводит к высоким давлениям и большим деформациям в зонах фактического контакта, которые оказывают влияние на контактную жесткость, надежность посадок, трение, износ и др. Следовательно, при моделировании контактного взаимодействия необходимо учитывать свойства поверхностного слоя. В связи с развитием вычислительной техники за последние пятьдесят лет этой проблеме посвящено большое количество работ [7, 8, 49, 47, 50, 53, 58, 88, 107 и др.]. Однако в большинстве случаев при решении задачи о контакте шероховатых поверхностей микронеровности поверхностей представляются простыми геометрическими фигурами: сферами, конусами, пирамидами, наборами стержней и др., а решение для отдельной неровности базируется на теории Герца. В ряде случаев такое представление является весьма грубым приближением. Кроме того, поскольку большинство решений выполнены для довольно простых геометрических тел, в основном, для плоских стыков, они не являются универсальными и не позволяют оценить параметры контакта произвольных тел с шероховатыми поверхностями. Между тем, возможности современной вычислительной техники позволяют моделировать объекты исследования с высокой точностью и таким образом избавиться от многих допущений.

Таким образом, существует разрыв между двумя направлениями в решении контактных задач – направлением, занимающимся решением задач для макрообъектов без учета шероховатости поверхностей контакта и направлением, которое изучает контактное взаимодействие шероховатых тел на микроуровне, но не имеет универсального приложения к макроскопическим объектам. Вместе с тем, часто параметры контакта в одном из конструктивных узлов технического

объекта зависят от напряженно-деформированного состояния всего объекта, а поскольку деформации объекта могут быть сопоставимы с величиной шероховатости поверхности, то ее учет может существенно влиять на распределение контактных давлений. Такая ситуация возникает, например, при проектировании приспособлений для изготовления высокоточных деталей, уплотнений, узлов трения с большими размерами номинальных областей контакта и т.д. Поэтому в данной работе предпринята попытка разработать универсальную методику решения контактных задач для тел произвольных геометрических форм с учетом шероховатости поверхностей контакта методом конечных элементов. Параметры, характеризующие податливость шероховатого слоя, определяются при исследовании контакта малых фрагментов реальных тел с шероховатыми поверхностями – базовых моделях. Базовые модели строятся на основании данных профилометрии поверхностей реальных деталей, что позволяет рассматривать шероховатую поверхность, не вводя серьезных допущений. Сведения о податливости, полученные на базовых моделях, используются при решении прикладной задачи. Таким образом удается одновременно учитывать макрогеометрические особенности исследуемого объекта и его микрогеометрию в зоне контакта, объединяя в рамках разработанной методики решения принципы обоих направлений в решении контактных задач. При решении контактной задачи для базовых моделей оказалось возможным исследовать закономерности изменения пятен контакта при увеличении нагрузки, а также оценивать фактическую площадь контакта в зависимости от номинального давления на поверхности контакта. Развитию этой методики посвящено несколько работ, выполненных автором [79, 80, 81, 82].

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНТАКТА

1.1. Основные параметры шероховатости поверхности и способы их определения

Под поверхностным слоем понимают наружный слой детали, имеющий отклонения от идеальной геометрической формы (неровности) и изменённые физико-химические свойства по сравнению с основным материалом. Принято различать три вида неровностей: шероховатость, волнистость и отклонения от правильной геометрической формы. Шероховатость относится к микрогеометрии поверхностного слоя, отклонения формы – к макрогеометрии, волнистость занимает промежуточное положение. Субмикрощероховатость, под которой понимают совокупность неровностей нанометрового масштаба, обуславливает, главным образом, адгезионные свойства материала [109, 54, 12, 77 и др.], которые в этой работе рассматриваться не будут.

Шероховатость поверхности, наряду с волнистостью, является одной из определяющих характеристик поверхностного слоя и оказывает большое влияние на эксплуатационные свойства деталей машин. Шероховатостью поверхности называется совокупность неровностей с относительно малыми шагами, образующих рельеф поверхности [89]. Профиль шероховатости поверхности и его характеристики показаны на рис. 1.1.

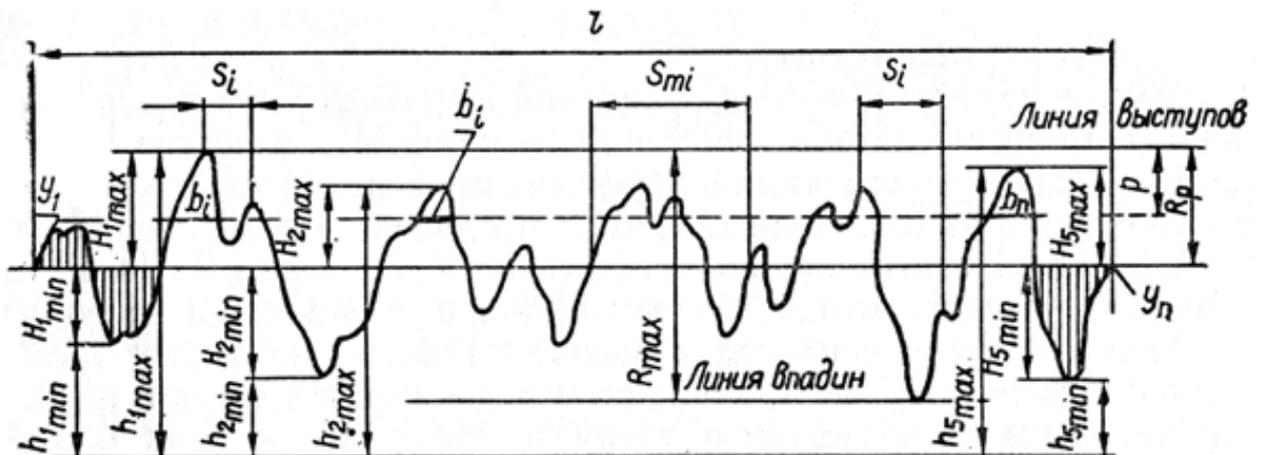


Рис. 1.1. Профиль шероховатости поверхности и его характеристики

ГОСТ 2789-93 устанавливает шесть параметров шероховатости поверхности: R_a – среднее арифметическое отклонение профиля; R_z – высота неровностей профиля по десяти точкам, R_{max} – наибольшая высота неровностей профиля, S_m – средний шаг неровностей профиля, S – средний шаг местных выступов, и t_p – относительная опорная длина профиля. Алгоритм расчёта этих параметров определяется ГОСТ 25142-82, там же приводится алгоритм расчёта таких величин, как

R_q - среднее квадратическое отклонение профиля от средней линии;

R_p - высота сглаживания профиля шероховатости;

R_v - глубина сглаживания профиля шероховатости;

$\overline{\text{tg } \alpha}$ - средний тангенс углов наклона профиля шероховатости;

l_o - относительная длина профиля шероховатости.

Кроме приведенных параметров шероховатости в научной литературе используются: кривая опорной поверхности (кривая Аббота-Файерстоуна), построенная в относительных или в абсолютных координатах, и параметры параболической аппроксимации её начального участка v и b ; $\bar{\rho}_m$ - средний радиус выступов профиля шероховатости; $\bar{\rho}$ - средний радиус местного выступа профиля шероховатости; β - средний угол профиля шероховатости; Δ - безразмерный комплекс Крагельского-Комбалова [64,71 и др.].

В литературе также встречается ряд характеристик, полученных при рассмотрении профиля шероховатости как реализации случайной функции. К ним относятся законы распределения, спектральные плотности микропрофиля поверхности, корреляционные функции, и др. Указывается, что в вертикальном направлении профиль шероховатости характеризуется законом распределения его ординат, снятых с определённым шагом квантования, а в горизонтальном - корреляционной функцией и спектральной плотностью.

Волнистость поверхности до настоящего времени не стандартизована и при её оценке руководствуются отраслевыми нормами. Наиболее часто волнистость характеризуется параметрами, аналогичным параметрам шероховато-

сти.

Макроотклонение поверхностного слоя характеризуется параметрами:

H_{\max} - наибольшая высота макроотклонения;

H_r - высота сглаживания макроотклонения (расстояние от средней линии профиля до огибающей).

В данной работе рассматриваются, главным образом, аспекты, касающиеся шероховатости поверхностного слоя.

Оценка неровностей может производиться качественными или количественными методами: первые основаны на сравнении обработанной поверхности с эталонными образцами при помощи специальных оптических методов, вторые – на измерении неровностей поверхности специальными приборами. Поскольку качественная оценка не позволяет получить информации о точной геометрии поверхности, в данной работе внимание уделяется второй группе методов.

В современном машиностроительном производстве существует большой арсенал измерительных средств, позволяющих проводить измерение параметров шероховатости поверхности - профилографы-профилометры, кругломеры, микротвердомеры, адгезиометры и т. д.

Существенно расширяет возможности таких приборов создание измерительно-информационных систем на базе ПЭВМ. Существует множество таких контрольно-измерительных систем. Примерами могут служить программно-аппаратные комплексы на базе IBM-совместимого персонального компьютера "Абрис ПМ-7.2", "Hommel tester T8000" (Hommelwerke GmbH, Германия), системы серии SV-600 (Mitutoyo corp., Япония) и др.

В рамках данной работы для получения сведений о параметрах шероховатости поверхностного слоя образцов использовалась измерительно-информационная система ИИС-1, созданная на кафедре «Технология машиностроения» БГТУ (рис. 1.2).

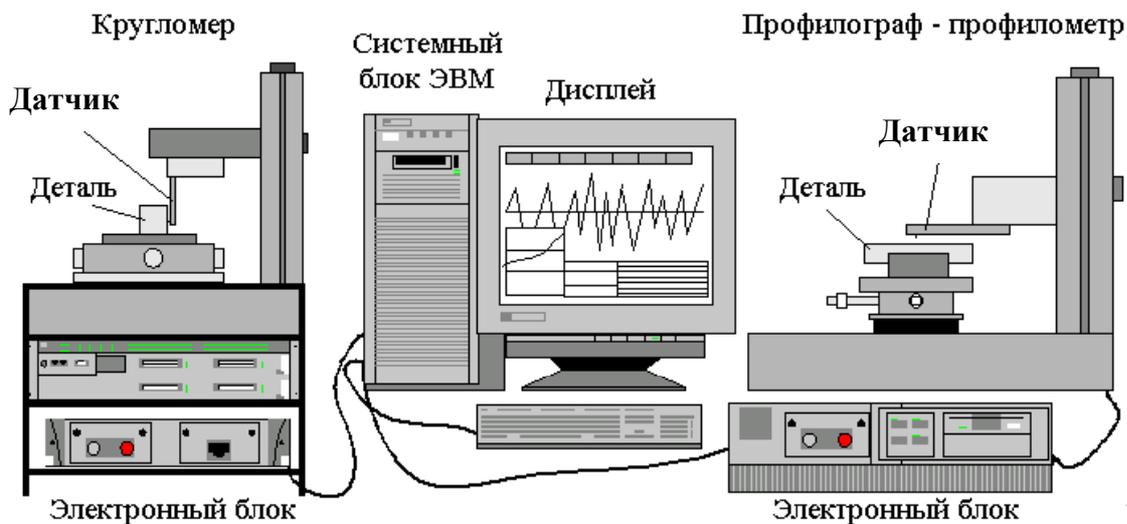


Рис. 1.2. Схема измерительно-информационной системы ИИС-1

В качестве вычислительного (управляющего) модуля используется компьютер IBM PC с микропроцессором 80486 и выше. В качестве измерительных модулей для измерения параметров шероховатости и волнистости используется профилограф-профилометр мод. 170311 ("Калибр"); для измерения отклонений от круглости используется кругломер мод. 175121 ("Калибр"). ИИС-1 позволяет измерять и рассчитывать геометрические параметры поверхностей деталей машин, характеризующие шероховатость, волнистость и отклонение от круглости, данные сохраняются в памяти ПЭВМ.

Принцип определения геометрических параметров поверхностей деталей машин заключается в преобразовании механических линейных смещений алмазной иглы, возникающих при её движении по шероховатой поверхности детали из-за наличия неровностей поверхностей, в электрические сигналы, пропорциональные этим смещениям. При сканировании поверхности иглой происходит 1000 измерений величины вертикального отклонения иглы на 1 мм ее перемещения вдоль исследуемой поверхности. Наличие в конструкции электронных блоков профилографа-профилометра мод. 170311 и кругломера мод. 175121 специальных разъёмов "Дистанционное управление" позволяет подключать их к внешним устройствам управления. Благодаря этому информацию, получаемую с датчиков, можно передавать в память ПЭВМ. Эта информация записывается в файл на жестком диске ПЭВМ, который затем обрабатывается специальной программой для вычисления характеристик шероховатости по-

верхности. Эта же информация может быть использована в качестве исходных данных для построения конечноэлементной модели шероховатой поверхности.

1.2. Контактные задачи и методы их решения

В первых работах, посвященных решению контактных задач, шероховатость поверхностей не учитывалась [40, 43, 102, 111]. Это было продиктовано отсутствием необходимых вычислительных возможностей. «Краеугольным камнем», на котором до сих пор строятся решения многих контактных задач, является задача об упругом контакте двух тел, впервые решенная Герцем [10]. При ее решении были сделаны следующие допущения: 1) поверхности тел в области контакта описываются уравнениями второго порядка; 2) материалы соприкасающихся тел однородны и изотропны; 3) нагрузка вызывает в зоне контакта только упругие деформации; 4) площадь контакта мала по сравнению с размерами тел и радиусами их главной кривизны; 5) силы давления нормальны к поверхности соприкосновения (силами трения пренебрегают). В такой постановке задача Герца может быть успешно решена для простых тел, имеющих правильную геометрическую форму – эллипсоидов, сфер, параболоидов и др., и обладающих идеально гладкими поверхностями. При решении задачи по Герцу в качестве параметров контакта обычно выступают форма и размеры пятна контакта и давления в контакте. На основе этого решения может быть также получено распределение напряжений в слое материала, прилегающем к поверхности сопряжения контактирующих тел. В задачах, решаемых с учетом шероховатости поверхности, из-за дискретности зоны фактического контакта вместо этих параметров контакта рассматривается относительная фактическая площадь контакта (ФПК) – величина, представляющая собой отношение площади поверхности, фактически участвующей в контакте, к номинальной площади контакта, а также распределение давлений на участках фактического контакта. Определение ФПК является одной из наиболее важных задач, поскольку эта характеристика существенно влияет на процессы, протекающие в области контакта. Часто требуется рассматривать податливость шероховатого слоя,

представляющую собой зависимость величины сближения контактирующих тел от нагрузки. Кроме того, можно говорить о локальном давлении в единичном контакте, часто достигающем высоких значений, и о среднем давлении на номинальной поверхности контакта, которое всегда оказывается значительно ниже.

Начиная с 1940-х гг. стали появляться методы, позволяющие решать контактные задачи для шероховатых поверхностей. Общей особенностью этих методов является активное использование методов теории вероятностей. Впервые этот подход был применен в 1940 г. в работе Журавлева В.А. [58]. Несколько позднее Крагельским И.В. было показано, что возможен расчет контактного взаимодействия в предположении, что высоты неровностей поверхности распределены по нормальному закону [65]. На последующие работы большое влияние оказала статья Дж. Гринвуда (Greenwood) и Дж. Вильямсона (Williamson), где авторами рассмотрен контакт номинально плоских шероховатых поверхностей [9].

Существует большая группа методов, которые рассматривают статистические модели дискретного контакта применительно к контакту номинально плоских шероховатых поверхностей. Подробный обзор этих методов приведен в [97], ниже будут приведены лишь некоторые общие положения. Общая схема расчета характеристик контакта сводится для этих методов к следующему. Высоты шероховатой поверхности рассматриваются как реализация случайного поля, а параметры контакта, в свою очередь, являются функциями множества случайных величин, связанных с этим полем. Вводится функция распределения высот неровностей, которая может быть получена на основе обработки профилеграмм, или исходя из исследований по статистической геометрии поверхностей. После этого решается контактная задача о взаимодействии единичной неровности с контртелом. При этом неровности представляются в виде простых геометрических фигур, для которых может быть получено решение контактной задачи по Герцу. При решении задачи постулируется характер деформирования неровностей (упругий, вязкоупругий, пластический и т.д.). Далее решение для

единичной неровности распространяется на группу неровностей. В рамках таких дискретных моделей можно оценивать относительную фактическую площадь контакта, зависимость нагрузки от сближения, максимальное давление на единичной неровности и т.д.

В модели Гринвуда-Вильямсона предполагается, что неровности вблизи вершины имеют форму сегмента сферы, а при упругом контакте взаимодействие отдельной неровности описывается теорией Герца. Высоты неровностей считаются распределенными по нормальному закону, а контакты соседних неровностей не влияют друг на друга. Авторы рассматривают контакт шероховатой изотропной поверхности с гладкой [9, 6].

Аналитические методы определения триботехнических характеристик взаимодействующих тел широко применяются для случаев, когда шероховатости поверхностей тел сильно отличаются, и одну из поверхностей можно считать плоской, а другую – шероховатой [25]. Поскольку получение аналитического решения существенно затрудняется для случая, когда обе поверхности шероховатые, переход от контакта двух шероховатых поверхностей к контакту гладкой поверхности с эквивалентной шероховатой поверхностью часто используется разными авторами при решении задач дискретного контакта в качестве приема, упрощающего вычисления [49]. Например, в работе Михина А.Н. и Онищенко Л.Н. этот прием использован при оценке зависимости фактической площади касания от сближения между шероховатыми поверхностями [74]. Авторы рассматривают ненасыщенный пластический контакт. Сравнение результатов с экспериментами, проведенными Демкиным Н.Б. и Рыжовым Э.В., показало, что отличие между расчетом и экспериментом не превышает 17%, составляя в основном 7-11%.

В модели Айнбиндера С.Б. и других авторов [34, 35, 36, 37] рассматривается контакт изотропной поверхности с гауссовским распределением высот и идеально гладкой поверхности. Контакт считается упругим, а форма неровностей моделируется поверхностью сферы, эллипсоида или осесимметричной поверхностью 4-го порядка, если неровности очень пологие. На основании работ

Айнбиндера С.Б. и Тюниной Э.Л. [37, 105] создана инженерная методика расчета фактической площади контакта.

В работах Рудзита Я.И. [86, 87] вероятностный подход впервые применен для моделирования контактного взаимодействия в предположении, что некоторая часть неровностей деформируется пластически, а остальные упруго. Считается, что неровность деформируется пластически, когда ее деформация превышает некоторую критическую величину. Неровности моделируются эллипсоидами, распределение их высот принимается рэлеевским. Авторы описывают способ перехода от контакта двух шероховатых поверхностей к контакту эквивалентной шероховатой поверхности с гладкой. Разработке критериев перехода от упругого деформирования неровностей к пластическому посвящены также работы Крагельского И.В., Буша А. и Гибсона Р. (Gibson), Бхушана Б. (Bhushan) [3, 42, 66].

Модель О'Каллагана-Камерона отличается тем, что, рассматривая контакт двух шероховатых поверхностей, авторы вводят предположение о произвольной ориентации линии, вдоль которой происходит взаимодействие отдельных неровностей [20].

Реальная поверхность всегда представляет собой совокупность неровностей, которые отличаются между собой по основным характеристикам. Поэтому моделирование неровностей одинаковыми геометрическими фигурами представляет собой достаточно грубое приближение. В работе Буша А.В. (Bush), Гибсона Р.Д. и Кеофа Д. (Keogh) [2] авторами предложена модель, в которой неровности моделируются эллиптическими параболоидами, кривизна поверхности которых зависит от высоты неровности. Расчеты по такой модели дают результаты, мало отличающиеся от результатов, полученных по модели Гринвуда-Вильямсона.

Существуют также модели шероховатых поверхностей с неровностями в виде цилиндров (Линкольн Б. [17]), конусов (Линг Ф.Ф., Яшимото Г., Хисакадо Т.), стержней (Крагельский И.В., [67]), пирамид (Хисакадо Т.). В работе [49] проанализированы достоинства и недостатки этих моделей.

В зависимости от величины сближения тел с шероховатыми поверхностями неровности могут деформироваться как упруго, так и пластически. Схема расчета с учетом пластического деформирования не имеет принципиальных отличий от решения упругой задачи. В работе Пуллена (Pullen) [21] было показано, что при пластическом деформировании номинальное нормальное давление q связано с относительной площадью контакта соотношением

$$\frac{q}{H} = \frac{\eta}{1-\eta},$$

где H - твердость материала, η - относительная площадь контакта.

Это соотношение было положено Найаком [19] в основу модели пластического контакта. Однако обычно неровности деформируются и упруго и пластически, в зависимости от величины нагрузки [8]. Предположение о смешанном характере контакта подробно развито в работе Рудзита Я.А. [87].

Изучению пластического контактирования шероховатых тел посвящена и работа Максака В.И., Советченко Б.Ф. и Чернышевой Т.В. [73]. Авторы этой работы решали задачу о контакте упрочняющегося сферического выступа с гладким штампом со смятием и сдвигом. Шероховатые поверхности моделируются набором сферических выступов, в основе решения лежат работы Герца и Миндлина (Mindlin) [10, 11, 18].

В работах Михина Н.М. и Добычина М.Н. показано, что в процессе приработки поверхностей происходит вырождение первоначальных пластических деформаций в упругие [76], об этом также упоминают Тейлер и Кноте в работе [16]. В ходе приработки изменяется исходная микрогеометрия контакта и значение коэффициента трения, переход к установившемуся режиму трения сопровождается стабилизацией параметров контакта [46]. Следовательно, для приработанных поверхностей можно решать и упругую задачу, не прибегая к методам решения упруго-пластических задач, учитывая новое значение коэффициента трения и наличие упрочнения в поверхностном слое материала.

Широкое распространение получила модель Демкина Н.Б., которая базируется на использовании аппроксимации относительной опорной длины η при помощи двух коэффициентов:

$$\eta = b\varepsilon^\nu,$$

где ε - сближение поверхностей, отсчитываемое от линии максимумов.

Такой подход избавляет от необходимости исследовать характер шероховатой поверхности, поскольку параметры b и ν определяются экспериментально и содержат в себе обобщенную информацию о поверхности [48, 49, 50, 51, 53].

В упомянутых выше работах авторы рассматривали контакт тел с номинально плоскими поверхностями. Для криволинейных тел решены лишь некоторые частные задачи, причем схема решения сохраняет свои основные черты. В основе многих работ по этой теме снова лежит статья Гринвуда и Триппа [8], в которой авторы рассмотрели упругий контакт шероховатых сфер, приняв те же допущения, что и при решении задачи о контакте номинально плоских шероховатых поверхностей [9]. Изучением контакта шероховатых сфер, а также сфер с шероховатой плоской поверхностью занимались Свириденко А.И., Корочкина Т.В., Петроковец М.И., Чижик С.А., Илсумс М.М., Рудзит Я.А., Хьюз Б.Д. (Hughes B.D.), Уайт Л.Р. (White L.R.), Кагами Дж. (Kagami J.), Ямада К. (Yamada K.), Хатазава Т. (Hatazawa T.) и другие [12, 14, 15].

В упомянутых выше работах использовано допущение, состоящее в том, что соседние микроконтакты не оказывают влияния друг на друга. Однако это справедливо только при определенной плотности зон микроконтактов. В работах Добычина М.Н., Литвинова В.Н., Горячевой И.Г. [57, 44] показано, что, начиная с некоторой плотности микроконтактов, соседние микроконтакты существенно влияют на процесс деформирования материала в некоторой локальной зоне. Учету взаимного влияния соседних микроконтактов уделено внимание и в работах Михина Н.М., Лемберского В.Б., Шайняка И.Р. [72, 75].

Итак, существуют разнообразные математические методы и модели, позволяющие решать широкий класс контактных задач. Однако наибольший про-

гресс достигнут в решении плоских и осесимметричных задач. Большое количество работ посвящено случаям, когда размеры области контакта малы по сравнению с характерным размером тел. Между тем на практике часто встречаются задачи, в которых размеры области контакта сопоставимы с размерами тел. Кроме того, контакт часто передает не только нормальную, но и касательную нагрузку. Для таких случаев решены только некоторые частные задачи. Численные методы обладают большими возможностями при решении контактных задач. В 1980-90 гг. для решения контактных задач (в том числе и с учетом шероховатости) начинает использоваться метод конечных элементов (МКЭ). Несмотря на то, что его теоретическая база была достаточно развита еще в 1970-е гг. в работах Зенкевича О., Сегерлинда Л. и др. [60, 98], практическое применение МКЭ долгое время не было в полной мере эффективным в силу недостаточного уровня развития вычислительной техники. Так, например, в работе Рыжова Э.В. [89] описывается решение контактной задачи для шероховатых поверхностей по РМКЭ при помощи программы, позволявшей на ЭВМ «Минск-32» решать плоские задачи с числом узлов 1000 и конечных элементов 1800. Решению контактных задач при помощи РМКЭ посвящены и работы [92, 93, 91]. Несмотря на доказанную работоспособность методов, следует признать, что для детального рассмотрения параметров контакта шероховатых поверхностей таких моделей недостаточно.

В связи с тем, что учет шероховатости поверхности вызывал определенные проблемы, связанные со значительным усложнением расчетов, были предприняты попытки выработать сравнительно простые критерии, которые позволили бы выделить диапазон геометрических и нагрузочных параметров контакта, в рамках которых теория Герца оказывается справедливой с достаточной точностью. В работах Крагельского И.В., Добычина М.Н., Комбалова В.С., Демкина Н.Б., Рыжова Э.В. [70, 53] высказывается мнение, что следует учитывать шероховатость в том случае, если ее высота соизмерима или превышает высоту волн. Однако такая простая оценка не учитывает нагрузочный фактор, который может играть решающую роль, как показано в работах Гринвуда

(Greenwood), Триппа (Tripp), Джонсона (Johnson) и Мацубары (Matsubara) [7, 47]. В работе [7] в качестве критерия выбрано отношение деформации неровностей к деформации контактирующих тел. Обзору критериев шероховатости посвящена работа Чижика С.А. [108].

В начале 1990-х гг. в связи с быстрым ростом возможностей компьютеров, в первую очередь, персональных, ситуация стала быстро изменяться, и МКЭ стал применяться для решения самых разнообразных задач, в том числе и из области дискретного контакта. Так, например, в работе Кноте (Knothe) и Тейлера (Theiler) [16] приведены результаты вычисления фактической площади контакта и распределения нормальных и тангенциальных контактных давлений численным методом для плоской задачи в упругой постановке. Этому же посвящены работы автора [79, 80]. В работе Варади (Váradí) и Недера (Néder) [27] методом конечных элементов вычислены параметры контакта плоского штампа и шероховатой поверхности, задача решена в объемной постановке. Этому направлению посвящены также работы Калкера (Kalker) и Деккинга (Dekking) [15], Ванга (Wang) и Кноте [28], а также работы автора [80, 81, 82].

Таким образом, можно говорить о том, что к настоящему моменту разработано большое количество моделей, на основе которых созданы методики расчета характеристик контакта шероховатых поверхностей.

Однако все методы и модели, упомянутые выше, объединяет несколько общих особенностей. Во-первых, все они базируются на достаточно серьезных допущениях. В силу разных причин авторы часто ограничиваются рассмотрением упругой задачи или рассматривают плоскую задачу. В ряде случаев этих моделей оказывается достаточно. Однако любые аналитические методы расчета параметров контакта позволяют получить справочные данные лишь для ограниченного числа задач определенных типов; они не могут подробно описывать напряженно-деформированное состояние реальных неровностей деталей, хотя именно эти данные дают представление об истинных условиях в контакте. По-видимому, допущения, подобные тем, что используются при решении задачи Герца, в ряде случаев негативно сказываются на точности решения. Реальные

микронеровности не всегда напоминают по форме простые геометрические фигуры и такое приближение часто является довольно грубым. В работе Томаса (Thomas), Вайанта Д.С. (Wyant), Колиопулоса К.Л. (Koliopoulos), Бхушана Б., Джорджа О.Е. (George) [30] в результате комплексных исследований на основе щуповых и оптических профилометрических методов показана непротиворечивость гипотезы о гауссовском характере реальных поверхностей (для ряда способов их формирования), однако Кноте К. (Knothe) и Тейлер А. (Theiler) в работе [16] отмечают, что распределение высот неровностей не всегда подчиняется широко известным законами распределения. Наконец, в большинстве методик не учитывается взаимное влияние микроконтактов, что делает их справедливыми лишь для случаев малой ФПК, хотя, например, в работе Чекиной О.Г. [107] к рассмотрению дискретного контакта применяется решение задачи полного контакта для случаев, когда относительная ФПК близка к единице. Во-вторых, остались практически не затронутыми вопросы, касающиеся решения контактных задач для реальных объектов произвольной геометрической формы с шероховатыми поверхностями. К сожалению, в подавляющем большинстве работ рассмотрены лишь контактные задачи для достаточно простых геометрических тел.

Таким образом, несмотря на то, что исследование параметров контакта шероховатых поверхностей продолжается уже несколько десятилетий, и в этой области сделано многое, нельзя говорить о существовании универсальной методики, которая позволила бы учитывать шероховатость поверхностей при решении произвольных контактных задач для реальных объектов. Сегодня, когда возможности вычислительной техники многократно возросли со времен начала работы над этой проблемой, нет необходимости сохранять все те допущения, которые легли в основу многих работ. Поэтому в данной работе предпринимается попытка создания универсального инструмента, который позволил бы решать задачи дискретного контакта для широкого класса реальных макрообъектов путем прямого моделирования микронеровностей, используя в качестве исходных данных результаты профилометрии поверхностей контакта этих объек-

тов. Решение проводится на основе метода конечных элементов с использованием программного комплекса DSMFem [22]. Преимущества МКЭ по сравнению с аналитическими методами состоят в том, что можно сравнительно легко построить расчетную схему для сложного реального объекта. Текущий уровень развития компьютеров позволяет сравнительно легко проводить расчеты для схем, содержащих десятки и сотни тысяч узлов и конечных элементов, не вводя значительных идеализирующих предположений о геометрии рассматриваемых поверхностей, что максимально приближает модель к реальному объекту.

Существует как минимум два подхода к решению задачи дискретного контакта для реальных тел средствами МКЭ. Первый подход заключается в построении детальной расчетной схемы для всего объекта, учитывая и микрогеометрию поверхностей контакта. Это возможно, когда области контакта невелики или нет больших градиентов напряжений. Однако в различных конструктивных узлах область контакта часто имеет характерный размер порядка десятков сантиметров, а дискретность контакта, обусловленная шероховатостью, вызывает необходимость построения детальных расчетных схем. Так, для моделирования типичной шероховатой поверхности с приемлемой точностью характерный размер конечного элемента должен составлять 1-5 мкм. В таком случае, если контактная область имеет площадь 300 см^2 , то для хорошего моделирования шероховатых поверхностей потребуется построить расчетную схему, насчитывающую около 5 миллиардов узлов. Решение такой контактной задачи в настоящее время по силам не каждому современному суперкомпьютеру, как по требованиям к памяти и скорости вычислений, так и в силу возможной неустойчивости работы алгоритмов решения контактных задач из-за большой нелинейности задачи.

Второй подход состоит в том, чтобы построить модель некоторого участка шероховатых поверхностей реальных деталей (базовую модель), достаточно представительную для того, чтобы получить на ней параметры контакта, например, зависимость сближения тел от номинального давления в контакте (силовая характеристика), и применить эти данные к решению задачи для объекта в це-

лом. Как правило, номинальная площадь поверхности контакта и нагрузки для исследуемых объектов известны *a priori*. Это позволяет приблизительно оценить номинальные контактные давления. Зная их, можно решить задачу дискретного контакта для базовой модели в пределах требуемого диапазона номинальных давлений и получить информацию о податливости шероховатого слоя, а также исследовать напряженно-деформированное состояние неровностей на поверхности контакта и распределение усилий вблизи нее. Метод конечных элементов позволяет проводить расчет как в упругой, так и в упруго-пластической обстановке, причем физическая нелинейность материала может учитываться автоматически. Эти же расчеты дают представление о значениях относительной фактической площади контакта.

Решение такой задачи означает построение эффективной универсальной методики, позволяющей одновременно производить расчет параметров контакта, учитывая микрогеометрию поверхностей в областях контакта, и напряженно-деформированного состояния макрообъекта в целом. Сведения о силовой характеристике поверхностного слоя можно учесть как путем изменения жесткостных параметров конечных элементов, формирующих поверхностный слой детали, так и сообщением дополнительных перемещений узлам поверхности контакта в соответствии со значениями контактных давлений, возникающих на этой поверхности. При этом нет необходимости прямого моделирования микронеровностей при расчете всего объекта.

В связи с этим в диссертации поставлена цель: разработать универсальную методику решения контактных задач для тел произвольных геометрических форм с учетом шероховатости поверхностей контакта методом конечных элементов. В рамках настоящей диссертационной работы для достижения поставленной цели были решены следующие задачи исследования:

1. Разработан метод получения информации о микрорельефе двумерной области для последующего использования ее при построении конечноэлементных моделей.

2. Разработана автоматизированная процедура построения конечноэлементных моделей шероховатых поверхностей на основании данных профилометрии.
3. Модифицированы алгоритмы и программы комплекса DSMFem, разработанного на кафедре «Динамика и прочность машин» Брянского государственного технического университета и предназначенного для решения задач строительной механики.
4. Разработан алгоритм решения контактных задач для деталей машин произвольной геометрической формы с учетом жесткостных параметров шероховатого слоя.
5. Определены силовые характеристики шероховатого слоя для поверхностей с различными параметрами шероховатости, построены их аппроксимации, пригодные для использования в решении контактных задач для деталей машин произвольных форм.
6. На основе построенной методики решена прикладная контактная задача для контакта колесного центра и обода колеса колесной пары дифференциального вращения.

В качестве объекта исследования, для которого решается контактная задача с учетом шероховатости поверхности, выбрано железнодорожное колесо колесной пары с дифференциальным вращением, разработанное на Московском заводе ремонта электроподвижного состава (ЗРЭПС). Работоспособность этого колеса сильно зависит от распределения контактных давлений, которое определяется зазором между ободом и колесным центром. Величина этого зазора сопоставима с величиной шероховатости. Колесо этой конструкции многократно исследовалось, однако учет шероховатости никогда не выполнялся.

При выполнении работы приняты следующие допущения.

1. Базовые модели, которые используются для определения параметров податливости шероховатого слоя, могут иметь площадь $0,2 \dots 0,5 \text{ мм}^2$. Базовая модель представляет собой параллелепипед, одна из поверхностей которого имеет топологию шероховатого слоя. Эта поверхность является номинально

плоской. Поверхности контакта в различных конструктивных узлах часто не являются плоскими, но в связи с тем, что характерный размер базовой модели составляет доли процента от характерного размера области контакта реальных деталей, можно полагать, что применение силовых характеристик, полученных на базовых моделях с номинально плоскими поверхностями контакта, не внесет существенной погрешности в решение прикладной задачи для объекта произвольной геометрии.

2. Базовая модель представляет собой малый объем, выделенный плоскими поверхностями из материала детали. При решении контактной задачи для базовых моделей на поверхности выделения накладывались связи, перпендикулярные им, тогда как в реальных условиях точки этих поверхностей имеют возможность смещаться за счет податливости материала детали.

3. Вычисленные жесткостные характеристики шероховатых слоев получены лишь для некоторых взаимных положений неровностей, которые могут носить не общий характер.

ГЛАВА 2. КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

2.1. Построение базовых моделей

2.1.1. Получение информации о микрорельефе поверхностей

Для построения базовых моделей необходимо получить информацию о распределении микронеровностей в пределах некоторой выбранной области. При исследовании геометрических характеристик поверхностного слоя деталей обычно имеют дело лишь с несколькими независимыми измерениями, выполняемыми при помощи профилометра. Естественно, что за одно измерение профилометр может получить информацию лишь о рельефе вдоль одной линии (трассы). Информации такого характера недостаточно для построения конечно-элементной схемы, моделирующей сравнительно большой участок поверхности, здесь необходимо располагать данными о двумерном распределении неровностей на поверхности, для чего требуется выполнить много измерений по параллельным трассам. Исследуемый образец устанавливается на столик, который может перемещаться поперек направления сканирования с необходимым шагом при помощи микрометрического винта (рис. 2.1). Длина трассы может изменяться в пределах широкого диапазона в зависимости от характера микронеровностей. Для оценки параметров шероховатости, обусловленных типом механической обработки поверхности, направление трасс избирается в соответствии с ГОСТ для адекватной оценки параметров шероховатости, хотя для построения базовых конечно-элементных моделей направление трасс не является принципиальным. Поскольку при контакте в реальных условиях поверхности тел могут быть ориентированы произвольным образом, главная задача – по возможности точно смоделировать участок поверхности определенной площади.

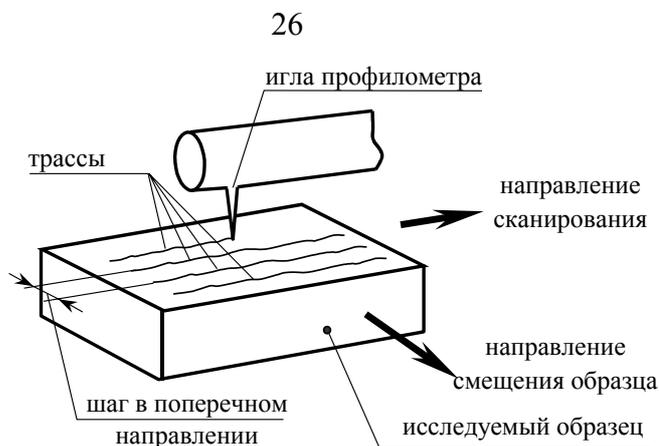


Рис. 2.1. Схема получения информации о микрорельефе образца

При получении информации по отдельным трассам на профилометре не удается вести отсчет от одной базы. Это обусловлено частичной разбалансировкой профилометра в ходе сканирования и неизбежной клиновидностью образца из-за погрешностей при его изготовлении. Кроме того, невозможно обеспечить абсолютно точную установку образца на столике профилометра. Эти обстоятельства приводят к появлению в данных о профиле поверхности тренда, в результате чего на полученном изображении поверхности наблюдаются протяженные впадины и выступы, которые не типичны для вида обработки, которым получена шероховатая поверхность. Например, на рис. 2.2 показано изображение поверхности, полученной алмазным выглаживанием, причем изображение построено по данным профилометрии без дополнительной обработки.

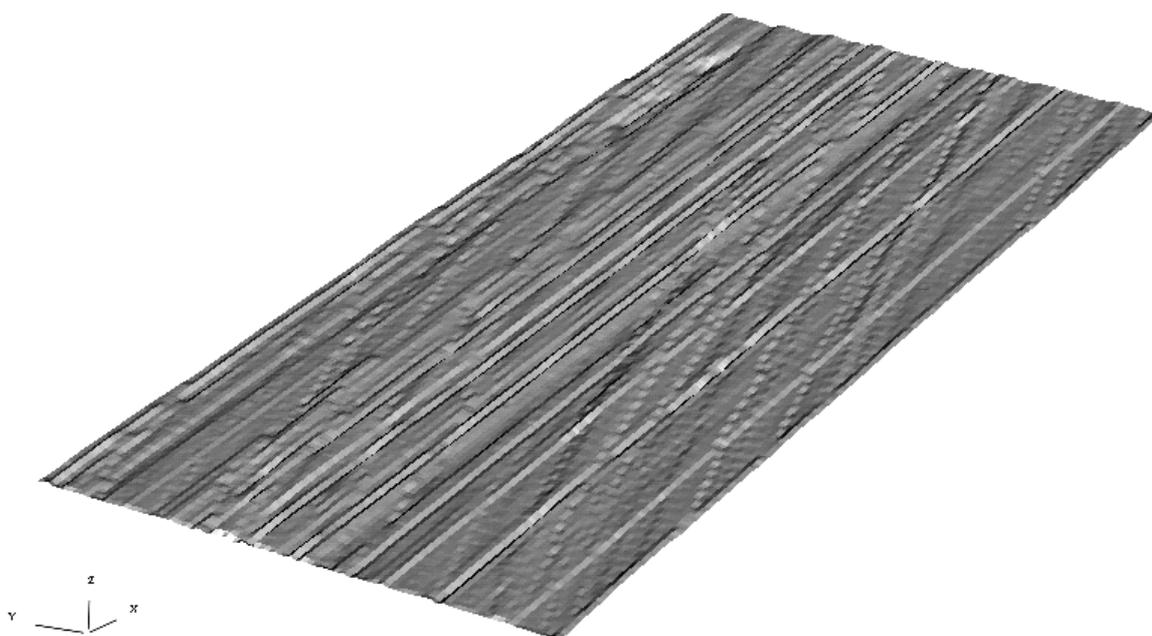
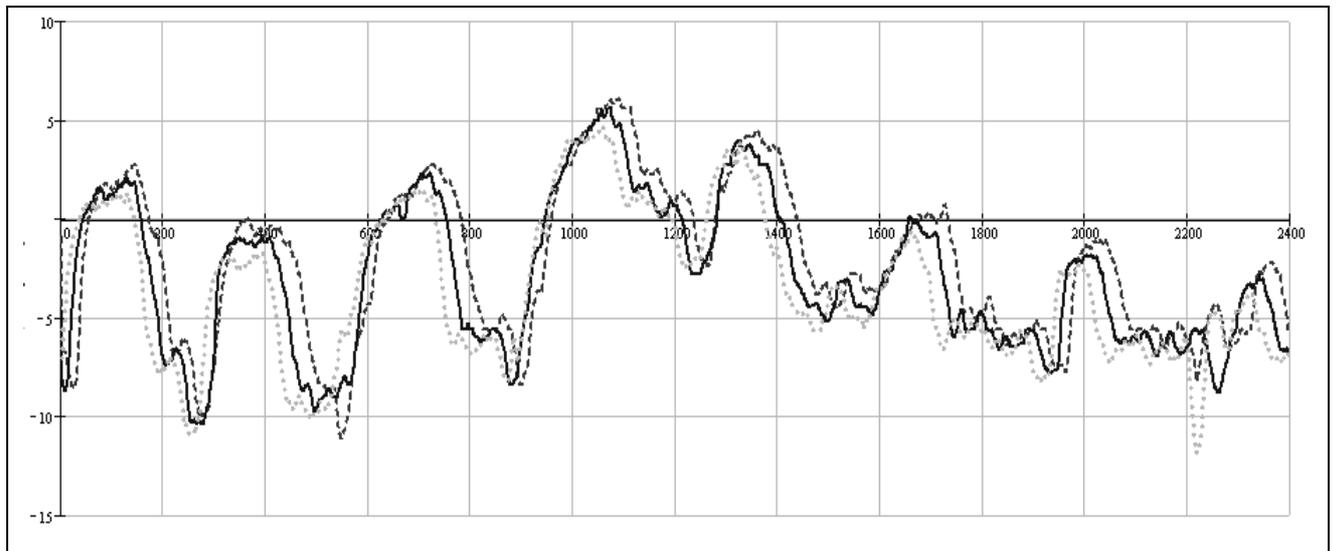


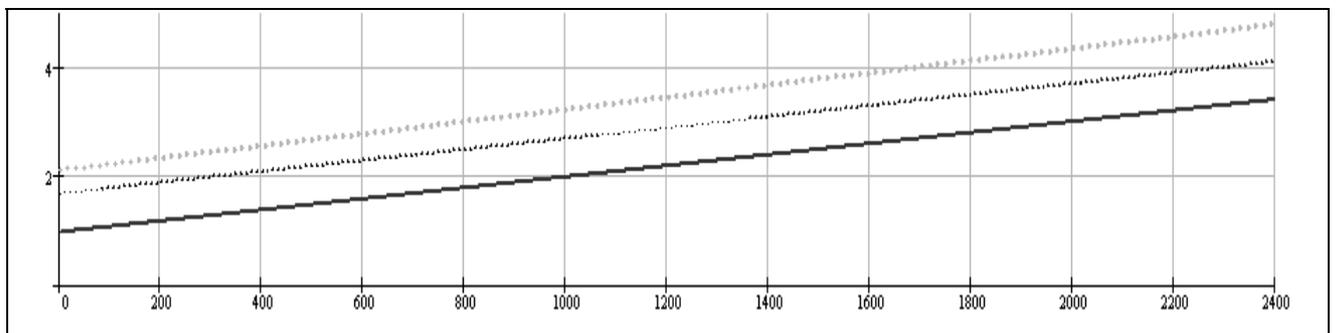
Рис. 2.2. Поверхность, построенная по необработанным данным

На рисунке хорошо видны нерегулярные продольные впадины, которые не соответствуют действительному рельефу рассматриваемой поверхности, обусловленному обработкой. Для устранения влияния этого недостатка данные, полученные в ходе профилометрии, обрабатываются по специальному алгоритму, суть которого сводится к удалению тренда. Обработка идет таким образом, чтобы средние линии всех трасс расположились в одной плоскости и соответствовали нулевому уровню. На рис. 2.3 показаны профили поверхности, полученные на трех соседних трассах, до удаления тренда и после его удаления. Отдельно показан тренд. Разрешение вдоль трассы составляет 1 мкм, расстояние между трассами 5 мкм. Применяется один из стандартных алгоритмов удаления тренда в предположении, что в пределах той длины, на которой велось измерение высот микронеровностей, тренд является линейным. Использованный алгоритм, а также более сложные способы обработки искаженных данных рассмотрены в работе Отнеса Р. и Эноксона Л [83]. Обработав по этому алгоритму все трассы, получим новые значения ординат поверхности, которые не содержат линейного тренда и имеют нулевую линию в качестве средней. Изображение той же поверхности, построенное по обработанным данным, показано на рис. 2.4. Видно, что нежелательные искажения исчезли, хорошо видны следы, оставленный инструментом при обработке.

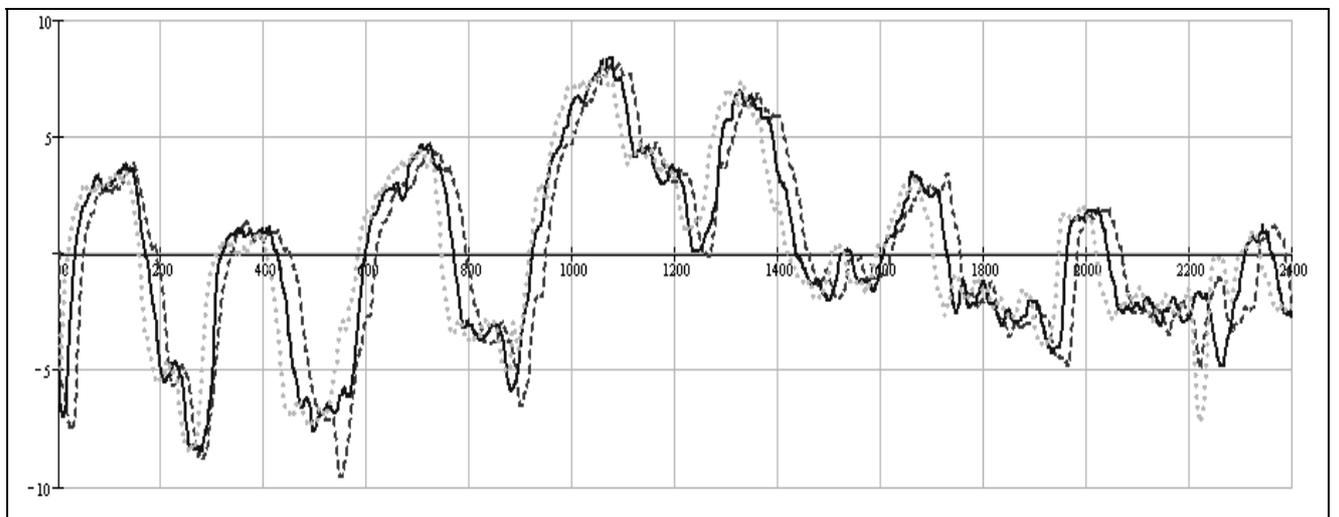
Следует заметить, что процедура удаления тренда может приводить к искажению истинной картины распределения микронеровностей на поверхности, в силу того, что реальные поверхности не являются номинально плоскими. Тем не менее, в данном случае эта процедура, по-видимому целесообразна, поскольку поверхности можно считать номинально плоскими в пределах рассматриваемой области. При применении более точного измерительного оборудования от этой процедуры можно отказаться.



а)



б)



в)

Рис. 2.3. Профили шероховатой поверхности:
а – некорректированные данные,
б – линейный тренд, в – данные с удаленным трендом

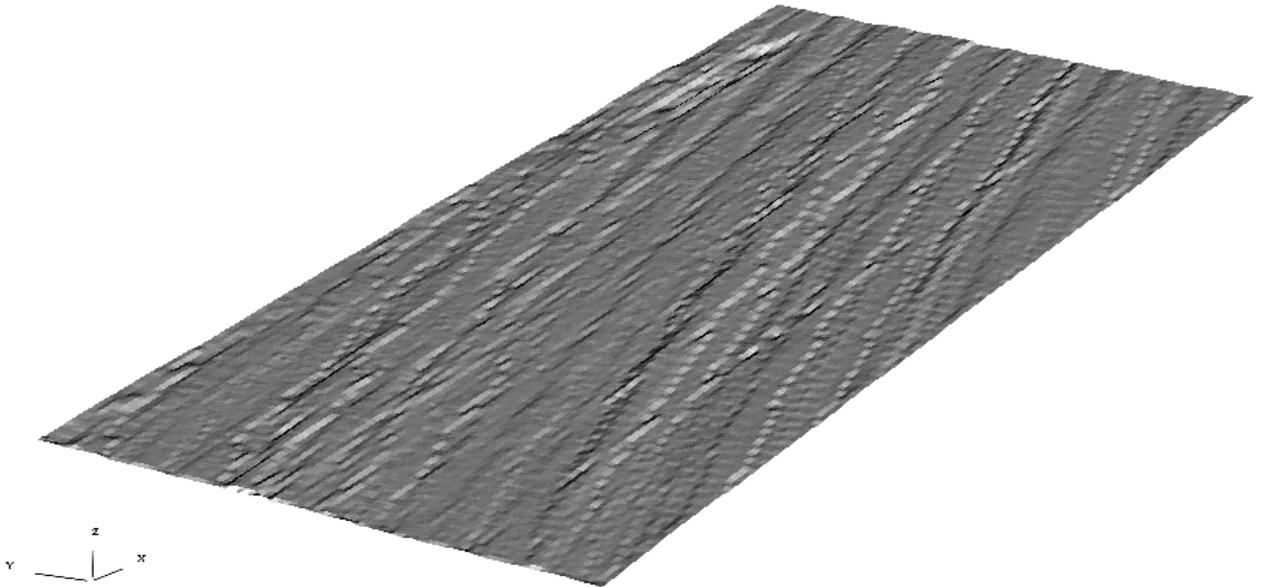


Рис. 2.4. Поверхность, построенная по данным с удаленным трендом

2.1.2. Формирование базовых моделей

Основная трудность построения конечноэлементной схемы для базовой модели обусловлена необходимостью использования элементов малых размеров в слоях, прилегающих к шероховатой поверхности, и разработке способов перехода от них к укрупненным элементам, которые обеспечивали бы, с одной стороны, значительное снижение количества элементов, а с другой стороны – достаточную точность решения задачи МКЭ. Поскольку градиент напряжений на поверхности контакта оказывается весьма высоким, подповерхностный слой модели построен из двух слоев восьмиузловых элементов с характерным размером порядка 5 мкм, которые, как показали расчеты, обеспечивают высокую точность решения [110]. Остальная часть модели построена при помощи переходных макроэлементов, поскольку было выяснено, что резкие изменения в напряжениях наблюдаются только на расстоянии, не превосходящем 10-15 мкм от поверхности контакта и применение четырехузловых элементов не приводит к существенным искажениям истинной картины напряженно-деформированного состояния.

Размеры базовых моделей нужно выбирать таким образом, чтобы модель была достаточно большой по сравнению с размерами отдельных микронеров-

ностей. Практический интерес чаще всего представляют поверхности, шероховатость которых характеризуется параметрами шероховатости $Ra = 0,1 \dots 2,5$ мкм и средним шагом (S_m) около 100 мкм. Для таких поверхностей достаточно представительной является базовая модель длиной 800...1000 мкм. Несмотря на то, что профилометр оцифровывает высоту микронеровностей с шагом 1 мкм, использовать всю эту информацию не представляется возможным при создании базовой модели указанных размеров. Число узлов конечноэлементной схемы базовой модели в случае мелкой равномерной сетки значительно превышает 1000000. Такую задачу решить можно, но время решения недопустимо велико. Характерный размер конечного элемента в 5 мкм оказался приемлемым для моделирования формы микронеровностей с достаточной степенью точности. Для получения конечных элементов хорошей формы желательно, чтобы их размер в поперечном направлении также составлял 5 мкм. Этим продиктовано решение выбрать расстояние между трассами равным 5 мкм. С целью обеспечения возможности выбора участка шероховатой поверхности для построения базовой модели длина трассы превышала длину базовой модели и составляла 2400 мкм. Число трасс было принято равным 100, что позволило использовать различные группы трасс. Для облегчения подготовки исходных данных для построения моделей для всех вариантов неровностей ее размеры были приняты 810 мкм по длине (в направлении сканирования) и 270 мкм в поперечном направлении, таким образом, из 100 имеющихся трасс использовалось 55. Высота модели, содержащей шероховатую поверхность, должна выбираться такой, чтобы напряженное состояние в точках плоскости, наиболее удаленной от поверхности контакта, было однородным. То есть, эта плоскость должна быть удалено настолько, чтобы эффекты, вызванные произвольно расположенными локальными контактами, затухали вблизи нее. Из решений теории упругости следует, что контактные напряжения затухают на глубине, равной 5 линейным размерам контактного пятна. Если рассматривать неровность с длиной волны 80 мкм, можно полагать, что размер пятна не будет превосходить 20 мкм. Таким образом, достаточно избрать высоту модели около

100 мкм. Высота базовой модели была выбрана с некоторым запасом и составила, в среднем, 150 мкм.

Все расчеты, проводимые в ходе исследований в рамках данной работы, были выполнены при помощи программного комплекса DSMFem [22]. При подготовке расчетных схем использовались линейные объемные конечные элементы из библиотеки этого комплекса, а именно, 4-х узловой, 6-ти узловой и 8-ми узловой элементы (рис. 2.5). Их подробное описание можно найти литературе по методу конечных элементов, например в работе [60], их конкретной реализации в комплексе DSMFem посвящена одна из глав в работе [110].

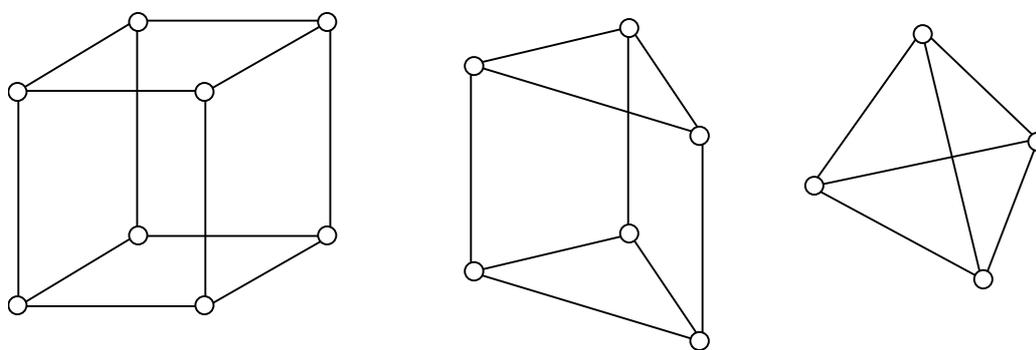


Рис. 2.5. 8-ми, 6-ти и 4-х узловой объемные элементы

При решении пространственных контактных задач наилучшим образом зарекомендовал себя 8-ми узловой конечный элемент, однако, построение расчетных схем лишь на базе элементов этого типа возможно лишь для объектов, имеющих сравнительно простую форму. Кроме того, при моделировании фрагментов тел с шероховатыми поверхностями необходимо сгущение сетки конечных элементов вблизи поверхности контакта, что затруднительно без применения элементов других типов. Шестиузловые объемные конечные элементы предоставляют больше возможностей для сгущения сетки, но наиболее универсален при формировании сложных трехмерных конечноэлементных моделей четырехузловой объемный конечный элемент. Эти элементы обладают двумя недостатками. Во-первых, они обеспечивают меньшую точность решения, чем восьмиузловые элементы, во-вторых, с их использованием построение расчетной схемы становится более трудоемким. В силу этих обстоятельств такие элементы использовались только для сгущения сетки. Для облегчения процедуры

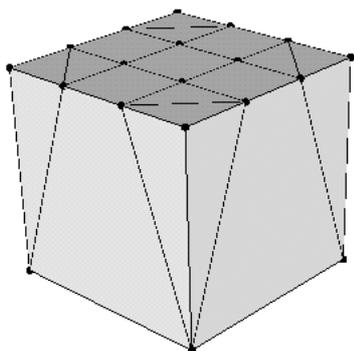


Рис. 2.6. Макроэлемент для сгущения сетки

сгущения конечноэлементной сетки также применялся специальный макроэлемент, имеющий различное число узлов на двух противоположных гранях (рис. 2.6). Верхняя его грань содержит 16 узлов, а нижняя 4. Узлы на верхней грани расположены так, что на них может быть построено 9 восьмиузловых элементов слоя, лежащего над макроэлементом, либо 9 макроэлементов того же типа, но меньшего размера.

том, либо 9 макроэлементов того же типа, но меньшего размера.

В ходе обработки исходных данных программой ввода и построения схемы макроэлемент разбивается на 1 восьмиузловой, 4 шестиузловых и 8 четырехузловых элементов, как показано на рис. 2.7.

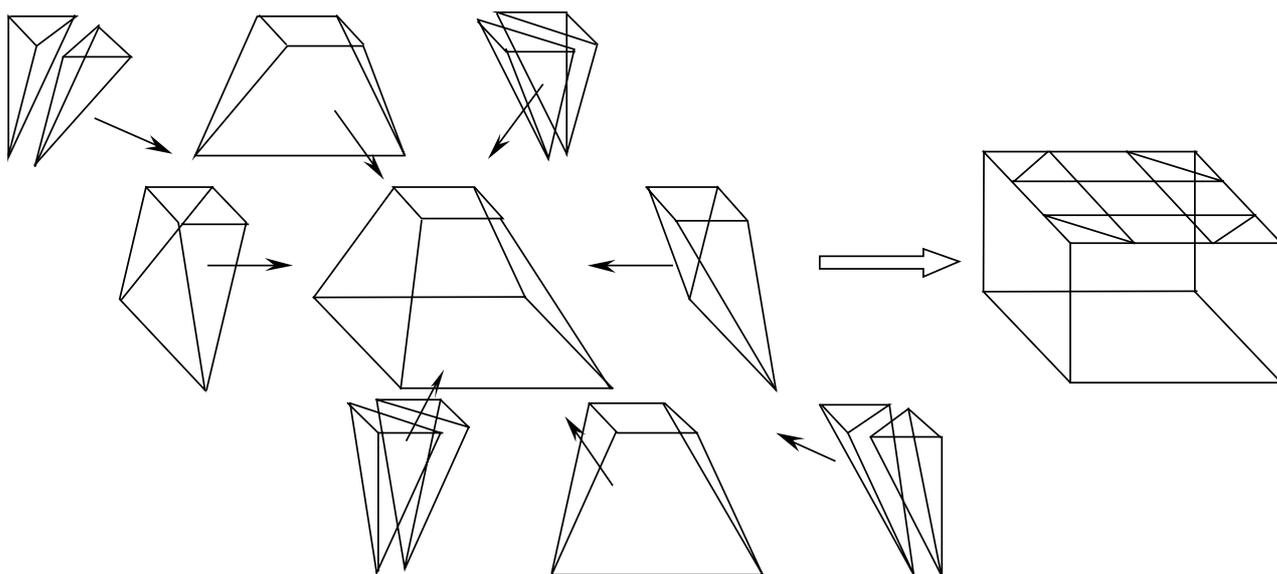


Рис. 2.7. Формирование макроэлемента для сгущения сетки

Таким образом, макроэлементы позволяют укрупнять либо измельчать сетку конечных элементов, увеличивая или уменьшая число элементов в последующем или предыдущем слое в 9 раз. Для обеспечения хорошей формы элементов желательно, чтобы макроэлемент имел форму слегка сплюснутого куба.

Кроме того, для учета контакта использовался контактный конечный элемент из библиотеки элементов комплекса DSMFem. Этот логический элемент, представляющий собой абстракцию, позволяет описывать условия отсут-

ствия проникновения одной поверхности в другую, а также условия взаимного проскальзывания поверхностей.

Полная базовая модель содержит 74532 элемента и 56188 узлов, количество степеней свободы упругой задачи составляет 168564. Общий вид нижней части базовой модели показан на рис. 2.8.

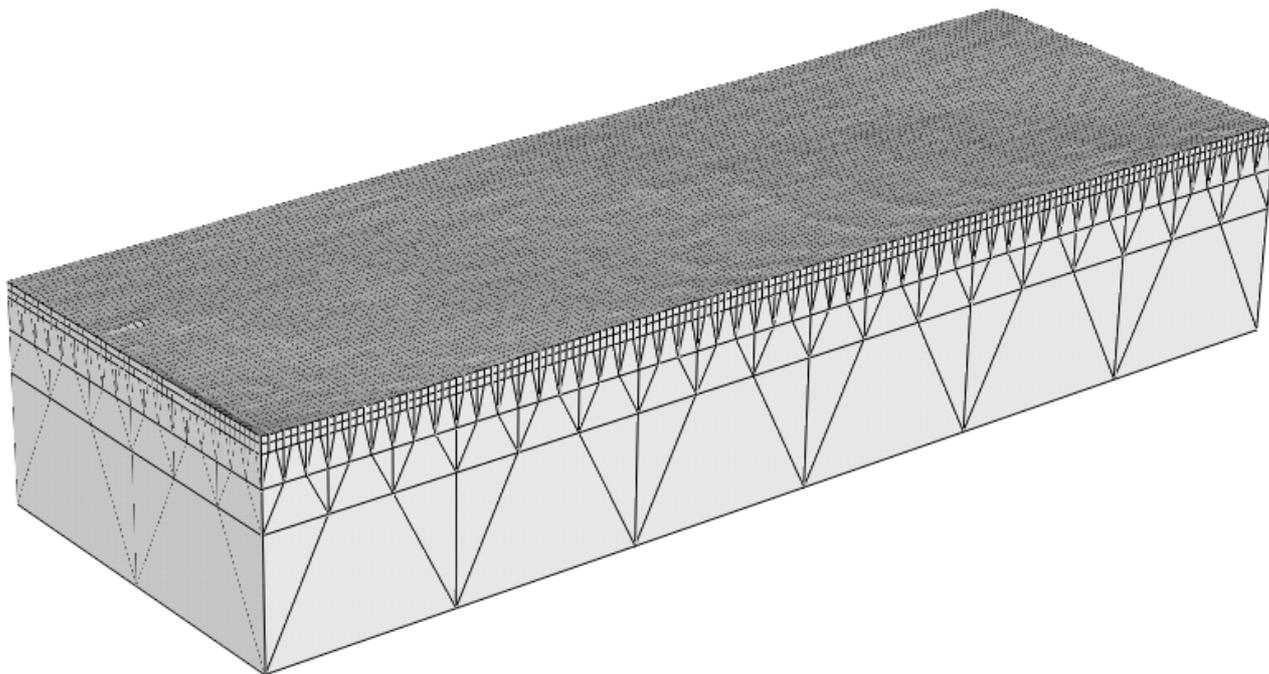


Рис. 2.8. Нижняя часть базовой модели

2.1.3. Краевые условия

Наиболее удобным образом задать краевые условия для базовой модели можно, наложив связи на все поверхности выделения базовой модели и задав кинематические условия нагружения, то есть, поступательное смещение одной модели относительно другой по нормали к номинальным поверхностям контакта. Закрепление поверхностей выделения связями в соответствующих направлениях обеспечит нахождение выделенного объема тела в тех же условиях, что и соседние области. Задание кинематических условий нагружения позволяет существенно сократить время решения задачи. Однако существует одна проблема, требующая решения. При построении модели номинальные плоскости поверхностей располагаются параллельно. Из-за произвольного расположения неровностей существует возможность контактирования вершин неровностей

лишь в некоторой локальной области модели. Несмотря на то, что процедура удаления тренда в ряде случаев частично или полностью решает эту проблему, обеспечивая появление контактов, рассеянных по значительной части поверхности модели, все же возможно такое взаимное расположение неровностей на поверхностях моделей, что локальных контактов не избежать. В связи с этим была разработана процедура введения шероховатых поверхностей в контакт (рис. 2.9).

Базовые модели, представляющие два фрагмента тел, имеющих шероховатые поверхности, располагаются случайным образом одна по отношению к другой так, чтобы между парами контактирующих узлов оставались зазоры. На первом шаге находится минимальный зазор между моделями, и верхняя модель смещается по нормали к нижней поверхности на величину этого зазора (рис. 2.9 а). На втором шаге находится вторая пара узлов с минимальным расстоянием между ними, и верхняя модель поворачивается относительно линии, проходящей через узел, вошедший в контакт, и перпендикулярной линии, соединяющей точку первого контакта с найденным узлом, на минимальный угол до введения в контакт второй пары узлов (рис. 2.9 б). На третьем шаге снова находится пара узлов, такая, чтобы поворот верхней модели относительно линии, соединяющей первые две точки контакта, происходил на минимальный угол для введения новой пары узлов в контакт (рис. 2.9 в). Если найденный минимальный угол соответствует повороту в направлении «от центра модели» (рис. 2.9 в), то поиск пары узлов продолжается.

Поворот должен происходить в направлении «к центру модели», так как только в этом случае узел верхней модели, соответствующий центральной точке модели С, при любых поворотах будет перемещаться вниз. После третьего шага выполняется проверка. Если точка С находится внутри треугольника, который можно построить, используя три точки контакта в качестве вершин (рис. 2.9 в), то процедура останавливается, поскольку такое взаимное положение базовых моделей обеспечивает равномерное вовлечение в контакт остальных точек поверхности. В противном случае процедура поворотов повторяется

итерационно со второго шага с отбрасыванием той точки, которая вошла в контакт раньше всех. Для поверхностей, с которыми шла работа до сих пор, было достаточно всего одной-двух итераций. Столь быстрое успешное завершение, возможно, связано с тем, что трассы уже приведены к одной базе при удалении тренда. Это позволяет получить контакт параллельных друг другу номинально плоских поверхностей базовых моделей.

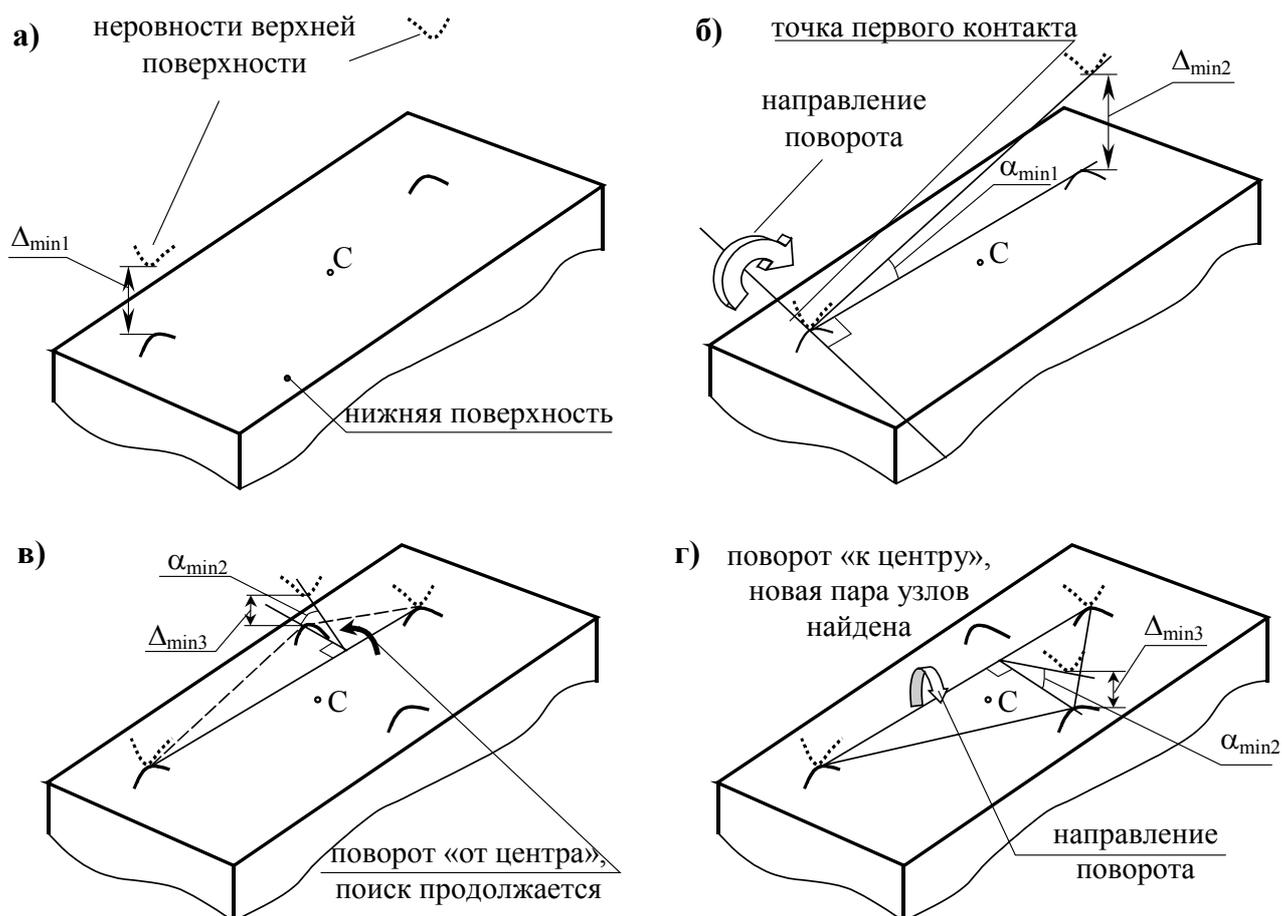


Рис. 2.9. Этапы процедуры ввода поверхностей в контакт:

а – обеспечение первого контакта за счет вертикального перемещения верхней модели на величину $\Delta_{\min 1}$; б – обеспечение второго контакта за счет поворота верхней модели в сторону потенциального контакта на минимальный угол $\alpha_{\min 1}$; в – направление поворота в сторону потенциального контакта - «от центра», поиск пары узлов продолжается; г – обеспечение третьего контакта за счет поворота верхней модели в направлении «к центру» на минимальный угол $\alpha_{\min 2}$, проверка условия остановки

Кинематическое нагружение осуществлялось путем смещения верхней поверхности верхней модели вертикально вниз. Для получения подробной информации о сближении моделей, формировании и изменении пятен контакта с

ростом нагрузки нагружение происходило за 15-65 шагов. Возможное сближение оценивалось по высоте микронеровностей и для рассмотренных поверхностей составляло 4-8 мкм. Расчеты показали, что абсолютная деформация всей базовой модели мала и вносит незначительную поправку. Расчетная схема со связями и кинематическим нагружением показана на рис. 2.10.

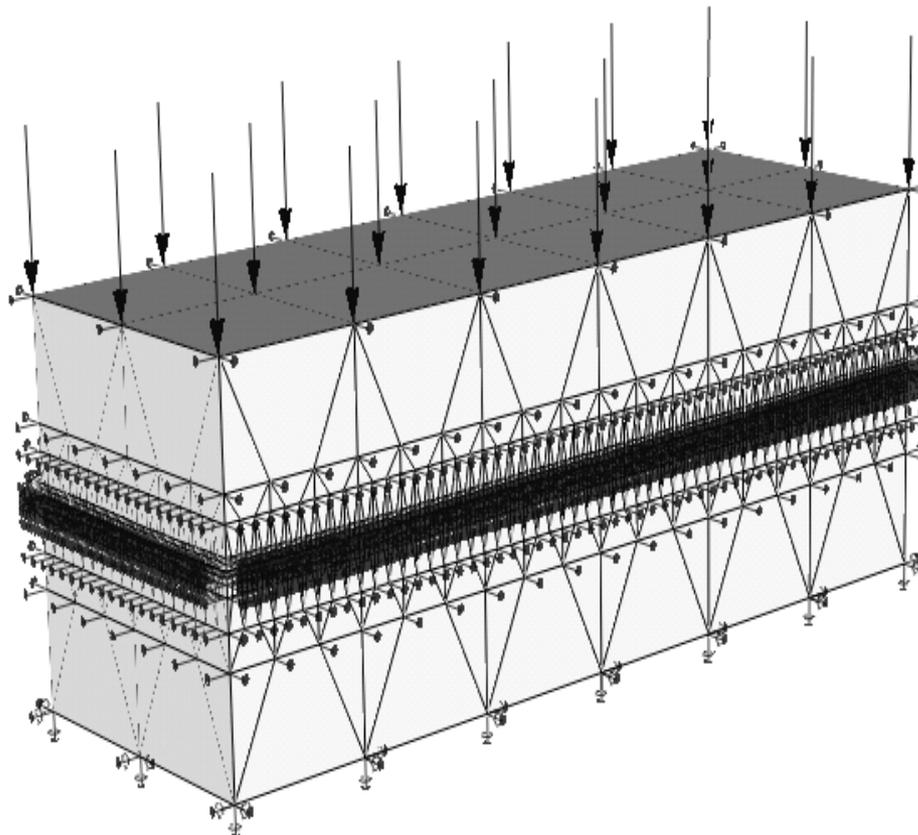


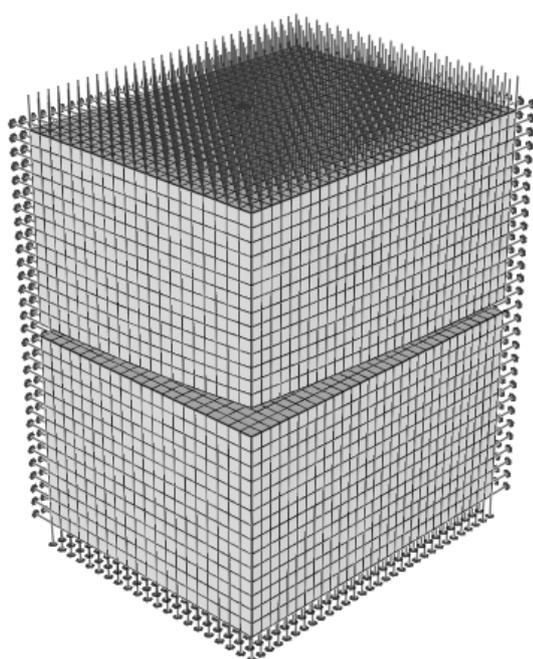
Рис. 2.10. Расчетная схема с крайевыми условиями

Контактная задача для базовой модели решалась при помощи алгоритмов и программ, реализованных в программном комплексе DSMFem. Алгоритм решения контактной задачи подробно рассмотрен в работах [22, 110], поэтому здесь он не приводится.

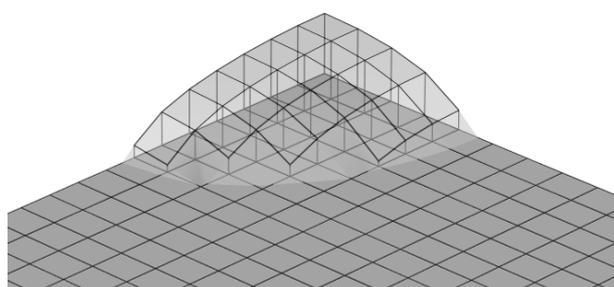
ГЛАВА 3. РЕШЕНИЕ НОРМАЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Тестирование алгоритмов решения нормальной контактной задачи в упругой постановке

Контактные задачи в общем случае не имеют точного аналитического решения, однако существует несколько частных случаев, для которых были получены «классические» решения. Одной из таких задач является задача Герца. Она рассмотрена ниже в качестве теста.



а)



б)

Рис. 3.1. Задача Герца:

- а - конечно-элементная модель;
- б - эпюра контактных давлений

Программный комплекс DSMFem неоднократно тестировался на разнообразных контактных задачах, поэтому здесь приводится только этот тест. Более подробные тесты алгоритмов комплекса DSMFem приведены в работе [110].

Объект исследования представляет собой $\frac{1}{4}$ эллипсоида, имеющего радиусы кривизны 3 и 5 мм и размеры 0,40×0,32×0,24 мм (рис. 3.1), находящийся в контакте с элементом полупространств таких же размеров. Материал тел - сталь с параметрами упругости $E = 210$ ГПа, $\mu = 0,3$. Вертикальная нагрузка распределена по узлам верхней грани фрагмента эллипсоида и составляет 20 Н, на

предделена по узлам верхней грани фрагмента эллипсоида и составляет 20 Н, на

плоскостях симметрии введены соответствующие связи. Аналитическое решение приведено в [56]. Результаты решения по МКЭ в сравнении с аналитическими представлены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Результаты решения задачи о контакте эллипсоида и полупространства

Параметр	Точное решение	Решение по МКЭ	Относительная погрешность, %
Полуоси эллипса контакта, мм	$a = 0,095$	$a = 0,096$	1,04
	$b = 0,065$	$b = 0,067$	1,47
Максимальное давление в контакте, МПа	1500,0 МПа	1475,7	1,62

Сравнение решения, полученного по МКЭ, с точным свидетельствует о работоспособности алгоритмов решения упругой контактной задачи.

3.2. Построение силовых характеристик шероховатого слоя при решении задачи в упругой постановке

Величина податливости, которая обусловлена наличием шероховатого слоя на поверхностях деталей, должна существенно различаться для поверхностей с различными параметрами. Построение универсальных зависимостей, которые позволили бы выбирать необходимые значения добавочной податливости в зависимости от параметров шероховатости поверхностей при расчете макрообъектов, было бы идеальным решением. Однако это представляется затруднительным ввиду огромного разнообразия возможных комбинаций этих параметров. Для построения таких зависимостей необходимо выполнить довольно много длительных расчетов, в которых рассмотреть большое количество вариантов поверхностей с фиксированными параметрами шероховатости и различным взаимным расположением следов обработки.

В связи с этим можно подвергнуть сомнению необходимость обширных исследований с варьированием всех параметров шероховатости. Более целесообразным представляется создание универсального инструмента, позволяющего решать контактные задачи для шероховатых поверхностей, и применение его

для необходимых частных случаев. В этой работе рассмотрено несколько частных случаев, которые, тем не менее, дают некоторое представление о характере контактирования шероховатых поверхностей, позволяют построить силовую характеристику шероховатого слоя, и тем самым свидетельствуют о работоспособности такого универсального инструмента.

Основные параметры шероховатости поверхностей, для которых проводилось решение контактной задачи, приведены в табл. 3.2.

Таблица 3.2

Параметры шероховатости рассмотренных поверхностей

Параметр	Номер поверхности			
	1	2	3	4
Ra, мкм	0,41	0,81	1,35	3,32
Rz, мкм	1,49	3,45	8,60	11,93
Rmax, мкм	2,85	5,53	10,45	18,48
Rp, мкм	1,49	2,97	4,83	10,13
Rv, мкм	-1,36	-2,67	-5,67	-8,36
Rq, мкм	0,54	1,04	1,76	4,04
Sm, мкм	100,91	124,85	86,14	286,98
S, мкм	99,13	123,32	87,08	286,32

На рис. 3.2-3.5 показаны поверхности, для которых проводились расчеты в рамках данной работы. Все изображения построены по данным профилометрии при помощи графического визуализатора программного комплекса DSMFem. Следует заметить, что упругая постановка задачи является весьма серьезным допущением и применима лишь для очень ограниченного диапазона нагрузок, при которых величина пластических деформаций невелика, однако после того, как микронеровности деформировались пластически, последующие нагружения приводят уже к упругим деформациям [16, 70, 76]. В этом случае решение задачи в упругой постановке может быть оправданным. Ниже приведены некоторые результаты решения упругой контактной задачи для базовых моделей, которые иллюстрируют возможность такого решения, а также позво-

ляют оценить влияние учета пластических деформаций на величину сближения тел. Такое сравнение показывает, что для рассмотренных поверхностей даже в диапазоне номинальных давлений от 0 до 5-7 МПа различие в сближениях составляет 20...40%, различие же в значениях площади фактического контакта гораздо больше.

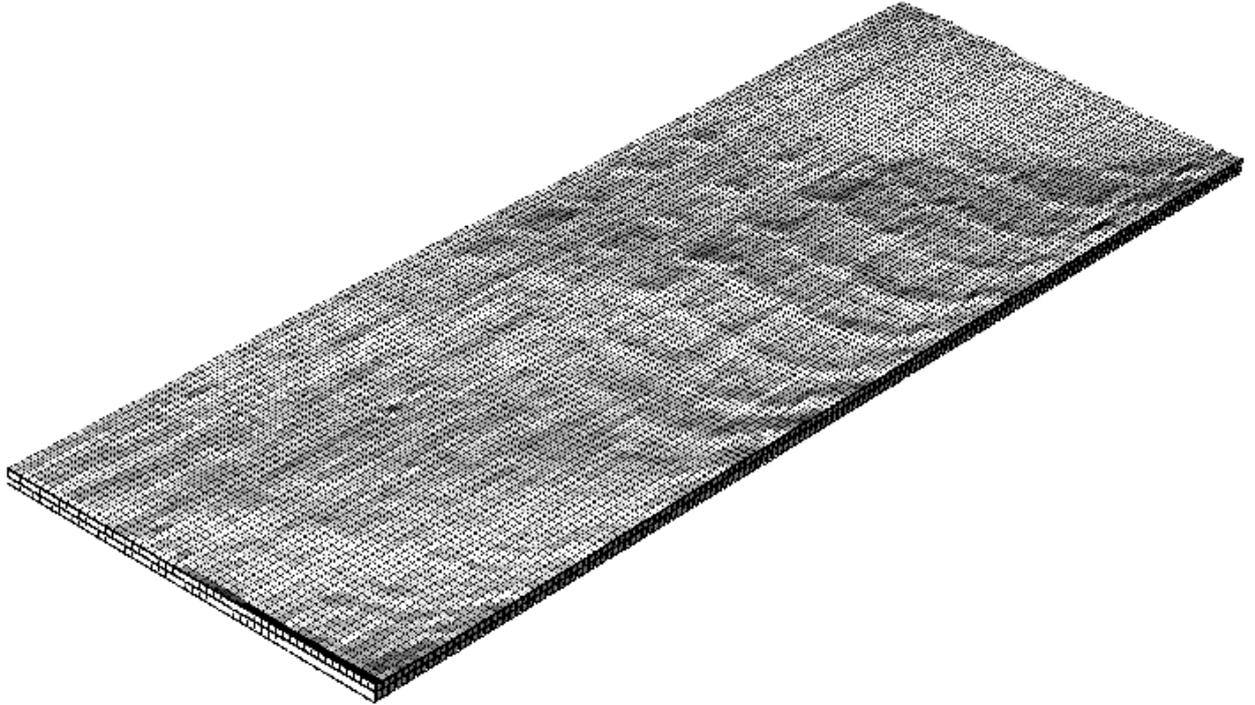


Рис. 3.2 Шероховатая поверхность (№1 в табл. 3.2)

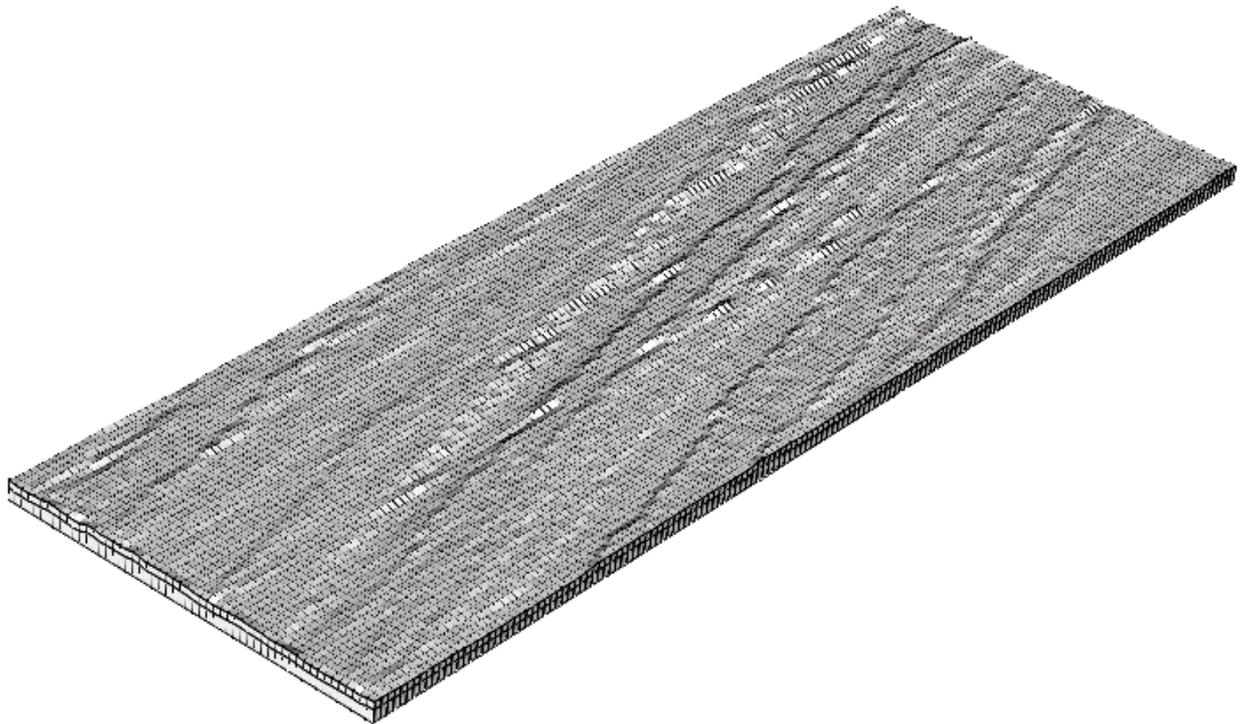


Рис. 3.3. Шероховатая поверхность (№2 в табл.3.2)

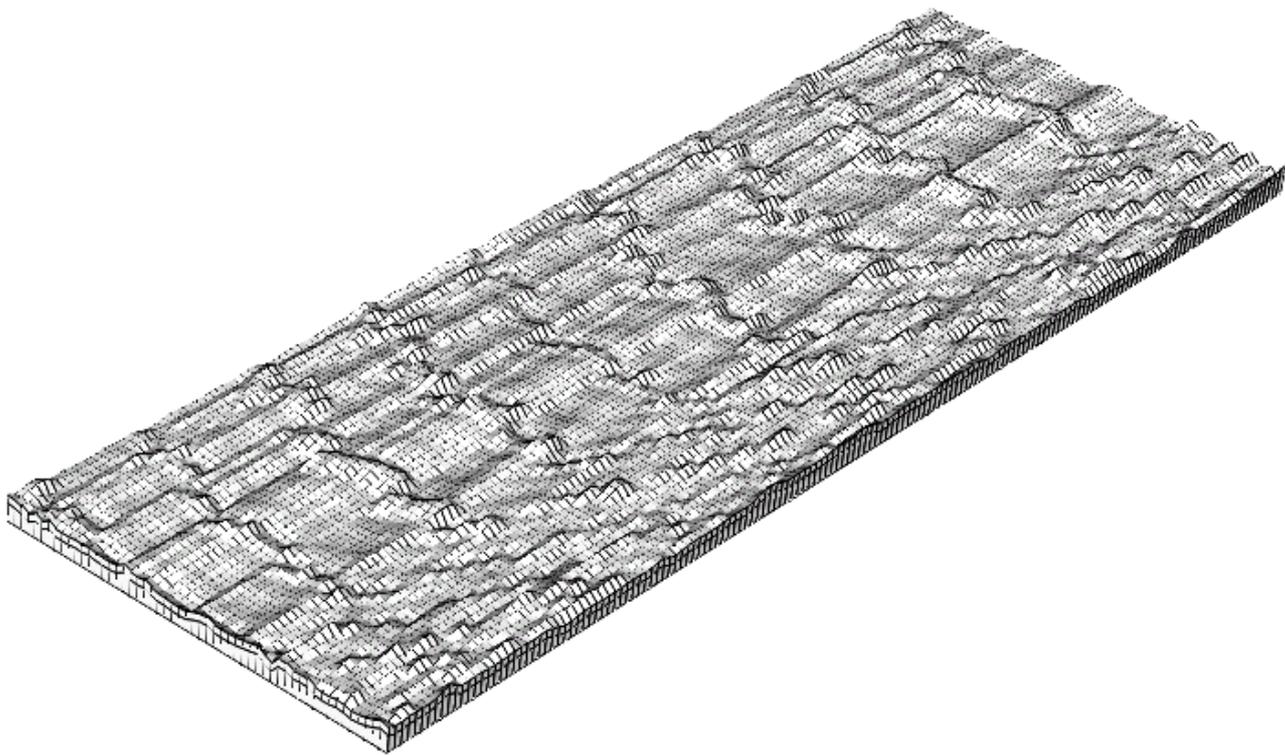


Рис. 3.4. Шероховатая поверхность (№3 в табл. 3.2)

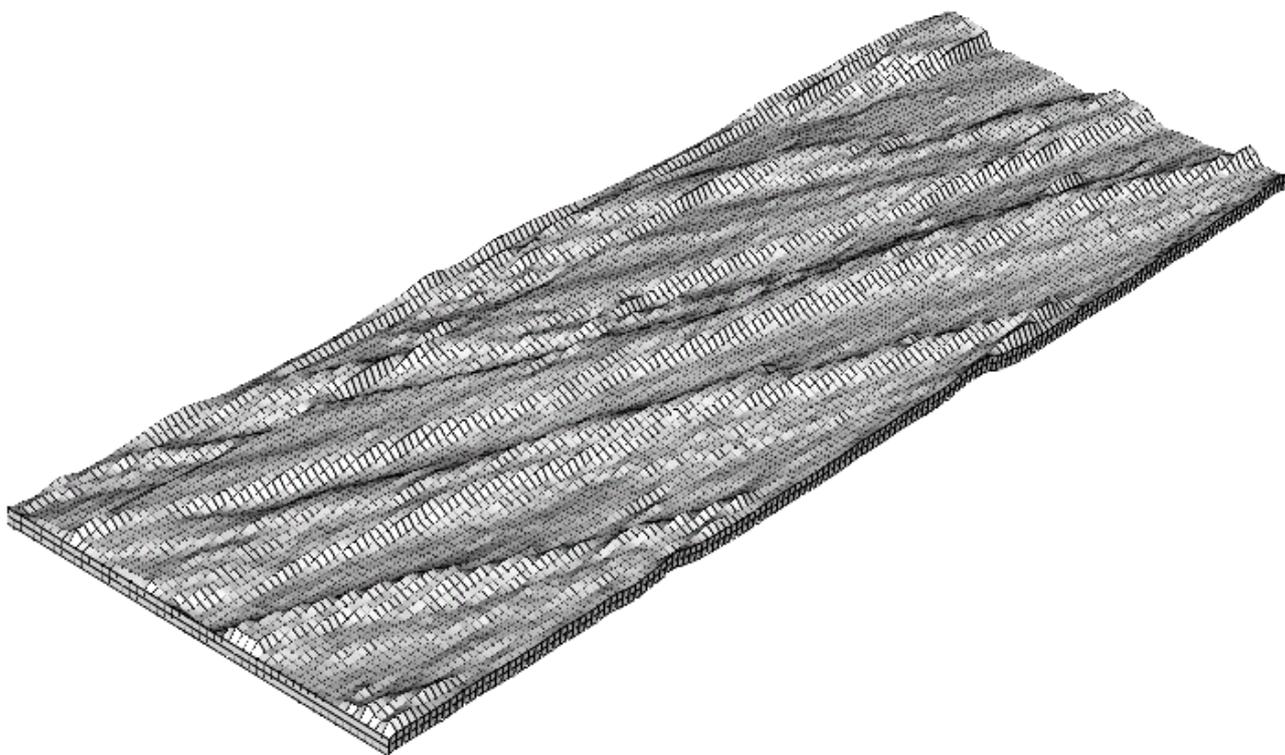


Рис. 3.5. Шероховатая поверхность (№4 в табл. 3.2)

При решении нормальной контактной задачи для базовых моделей с шероховатыми поверхностями велось наблюдение за следующими параметрами.

1. Номер шага нагружения.
2. Вертикальное смещение верхней поверхности модели Δh , мкм.

$$\Delta h = \frac{h}{n} \cdot N, \text{ где}$$

h - полное перемещение верхней поверхности модели,

n - число шагов нагружения,

N - номер шага нагружения.

3. Сближение моделей, обусловленное шероховатостью поверхностей, α , мкм.

$$\alpha = \Delta h - \frac{p_n}{E} \cdot H, \text{ где}$$

Δh - вертикальное смещение верхней поверхности модели,

p_n - номинальное давление в контакте,

E - модуль упругости,

H - общая высота моделей, $H = 300$ мкм.

4. Суммарное нормальное контактное усилие, P_c , Н – сумма проекций узловых контактных усилий на вертикальную ось.
5. Номинальное давление p_n , МПа.

$$p_n = \frac{P_c}{A}, \text{ где}$$

A - номинальная площадь поверхности контакта.

6. Относительная площадь фактического контакта (ФПК), A_r , %.

$$A_r = \frac{K_c}{K_n}, \text{ где}$$

K_c - количество узлов, вошедших в контакт,

K_n - количество узлов на поверхности контакта.

Результаты решения для поверхностей №1 (см. табл. 3.2) приведены в табл. 3.3 и на рис. 3.6-3.7. Результаты решения, полученные для остальных поверхностей, а также сравнительные результаты, приведены в приложении 1.

Результаты решения для моделей с поверхностями №1

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_C , Н · 10 ³	Номинальное давление P_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,057	0,057	3,5	0,016	0,022
7	0,400	0,399	132,0	0,604	0,460
13	0,743	0,739	494,0	2,260	1,490
19	1,086	1,077	1311,0	5,940	3,730
25	1,428	1,409	2734,0	12,480	7,660
30	1,714	1,684	4415,0	20,160	12,240
35	2,000	1,950	6477,0	29,580	17,210
41	2,400	2,332	9927,0	45,410	24,180
47	2,800	2,704	13956,0	63,790	31,240
59	3,600	3,436	23942,0	109,470	48,760
65	4,000	3,797	29580,0	135,250	56,260

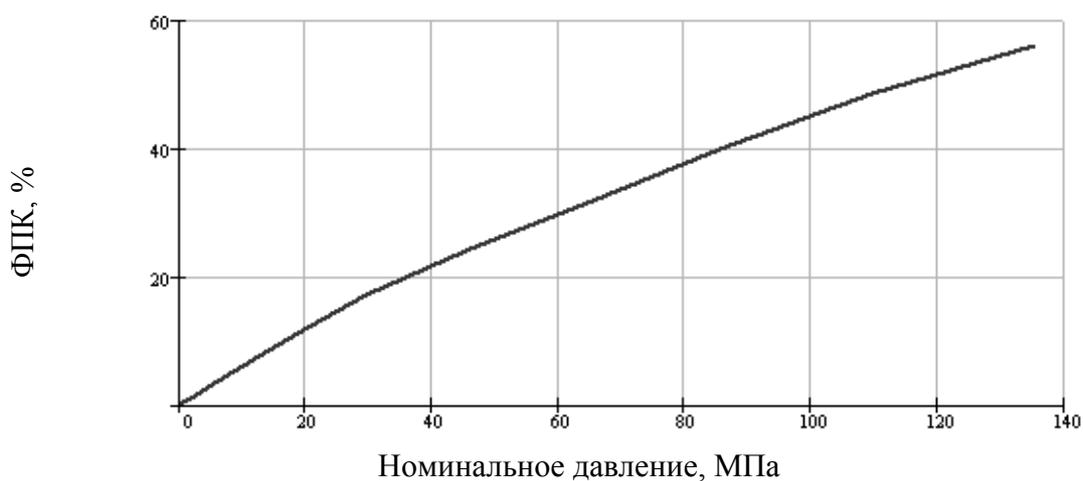


Рис. 3.6. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления

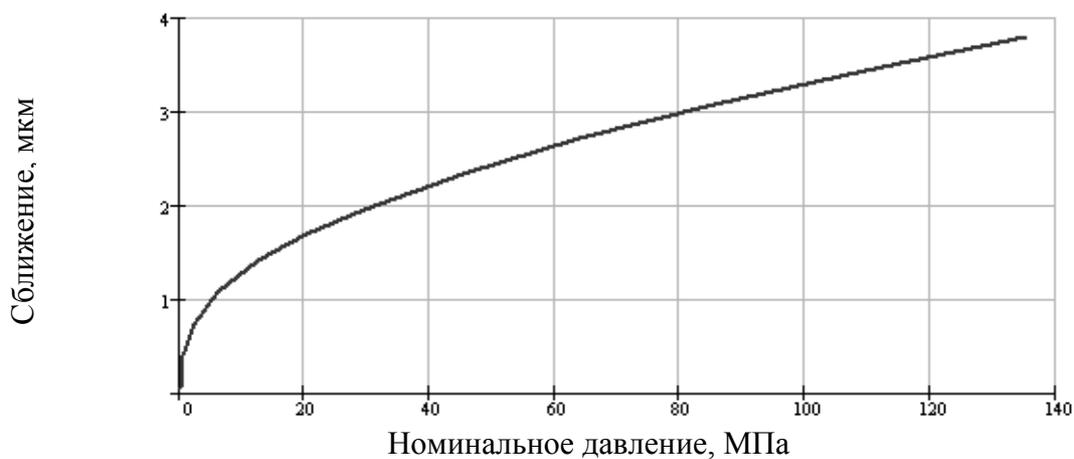


Рис. 3.7. Зависимость сближения от номинального давления

3.3. Методика решения упруго-пластической задачи

3.3.1. Способы учета пластических деформаций в задачах статики

Необходимость учета физической нелинейности материала часто возникает при расчете объектов, для которых характерна работа в условиях больших нагрузок, приводящих к пластическому деформированию отдельных элементов конструкции. Прежде всего, это задачи, связанные с обоснованием технологических приемов, основанных на упруго–пластическом деформировании материала деталей. Заневоливание пружин, обжатие рессор, поверхностно-пластическое деформирование в виде обкатки шариком или роликом, обдुвка дробью и многие другие процессы предусматривают упруго–пластическое деформирование изделия целиком или его поверхности. Для изделия это достигается путем нагружения его расчетной нагрузкой при которой в некоторых точках детали возникают пластические деформации. После снятия нагрузки возникают остаточные напряжения, которые благоприятно воздействуют на дальнейшую работу детали. Расчет таких процессов аналитическими методами возможен только для деталей простейшей формы (пружины, торсионы, сосуды под давлением). Процессы, связанные с пластическим деформированием поверхности, как правило, исследуются экспериментально.

Использование МКЭ позволяет решать эти задачи численными методами, однако трудоемкость этих методов велика, и не все теоретические аспекты этих задач прошли достаточное исследование.

При взаимодействии шероховатых тел даже при малых нагрузках, а, следовательно, невысоких номинальных давлениях в контакте, давления в отдельных точках поверхности контакта достигают значительной величины. При этом появляется пластическая деформация. Следует заметить, что в ходе продолжительного контактирования деталей, например, в узлах трения различных механизмов, довольно быстро происходит приработка поверхностей контакта. Микрорельеф поверхностей при этом сглаживается, а материал подвергается упрочнению поверхностным пластическим деформированием. В силу этого об-

стоятельства решение упругой контактной задачи может быть оправданным в случае достаточно гладких поверхностей, при этом решение можно проводить в предположении, что материал поверхностного слоя уже подвергнут упрочнению и обладает новым значением предела текучести. Однако для моделирования взаимодействия неприработанных поверхностей контакта контактную задачу необходимо решать в упруго-пластической постановке.

Для учета пластического деформирования материала обычно используют подходы, основанные на двух различных теориях. Обе теории предполагают, что пока деформации малы, напряжения и деформации связаны между собой линейной зависимостью, а при выполнении некоторого условия пластичности эта зависимость меняется. Для любого напряженного состояния связь между напряжениями и деформациями определяется на основе экспериментального исследования, выполненного на образце, при испытаниях на одноосное растяжение или кручение, поэтому оказываются связаны интенсивности напряжений и деформаций, а не компоненты тензоров напряжений и деформаций.

Первая теория носит название деформационной теории пластичности [39]. Она предполагает, что после появления пластической деформации все компоненты тензора напряжений и деформации изменяются одинаково, и соотношение между ними не меняется. В этом случае при наступлении пластичности меняется модуль упругости материала, причем его величина зависит от величины деформации. Этот подход находит широкое применение в решении задач с небольшими пластическими деформациями. Решение упруго-пластической задачи с использованием деформационной теории пластичности может быть реализовано различными методами, в том числе методом переменных параметров упругости, методом начальных напряжений или методом начальных деформаций [99].

Вторая теория называется теорией течения [62, 100]. Она устанавливает связь между приращениями напряжений и приращениями деформаций. Поскольку в этой теории все компоненты тензора напряжений изменяются по-разному, оказывается возможным учесть принципиально различные условия

деформирования материала в контактных задачах. Напряженно-деформированное состояние в точках объекта, удаленных от области контакта, на пятне контакта и на его границе принципиально различается, хотя действующие значения напряжений оказываются достаточными для появления пластических деформаций в любом случае. С ростом нагрузки увеличивается размер области контакта, иногда она перемещается, в результате чего точка поверхности, не находившаяся до этого в области контакта, может оказаться внутри нее, и напряженно-деформированное состояние в этой точке изменится принципиально. Деформационная теория пластичности не учитывает такие явления и вследствие этого не может применяться для решения упруго-пластических контактных задач. В качестве основы для решения упруго-пластической контактной задачи была взята теория течения. В силу того, что она формулируется в приращениях, ее легко сочетать с пошаговыми методами решения геометрически нелинейных задач.

3.3.2. Основные гипотезы и соотношения теории течения

Теория течения подробно изучена с теоретических позиций.

1. Гипотеза несжимаемости материала. Предполагается, что объёмная деформация Θ как в пределах упругости, так и за пределами упругости при малых деформациях пропорциональна среднему напряжению $\Theta = \frac{\sigma_0}{K}$ или $\sigma_0 = 3K\varepsilon_0$, причём коэффициент пропорциональности K тот же, что и в пределах упругости:

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \text{ где}$$

E и μ – модуль упругости и коэффициент Пуассона;

σ_0 и ε_0 средние напряжения и деформации :

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3}.$$

Эксперименты показывают, что за счёт пластических деформаций изменение объёма невелико, вследствие чего им часто пренебрегают, то есть, принимают $\varepsilon_0 = 0$.

2. Для разграничения упругого и пластического деформирования упрочняющегося материала вводят функцию, определяющую условие пластичности $f(\sigma_{ij}, q) = 0$, где q – параметр, определяющий меру упрочнения. В системе координат $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ функция, описывающая условие текучести описывает некоторую цилиндрическую поверхность, называемую поверхностью текучести. Осью поверхности текучести является линия, перпендикулярная девиаторной плоскости и проходящая через начало координат. След этого цилиндра на девиаторной плоскости называется кривой текучести (рис. 3.8).

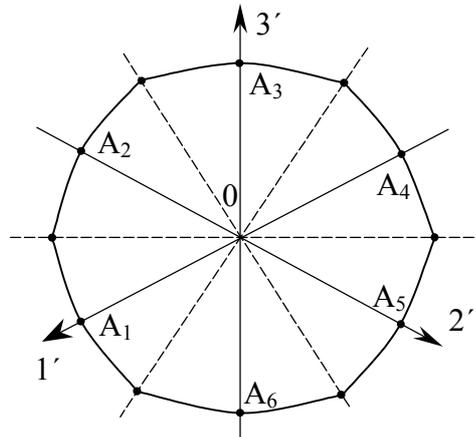


Рис. 3.8. Кривая текучести

В качестве меры упрочнения примем так называемый параметр Удквиста, который отражает накопленную деформацию.

3. Принимается гипотеза изотропного упрочнения, то есть в процессе нагружения поверхность пластичности, выражаемая уравнением пластичности, равномерно расширяется. В качестве функции пластичности примем условие пластичности Хубера-Мизеса:

$$f(\sigma_{ij}, q) = \frac{3}{2} \cdot s_{ij} \cdot s_{ij} - [\Phi(q)]^2 = 0, \quad \sigma_i^2 = \frac{3}{2} \cdot s_{ij} \cdot s_{ij}, \quad (3.1)$$

где σ_i – интенсивность напряжений.

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} \quad (3.2)$$

s_{ij} - девиатор напряжений: $s_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \sigma_0$.

Выбор условия пластичности Хубера – Мизеса равносильно гипотезе о том, что интенсивность напряжений является функцией параметра Удквиста, не зависящей от типа напряжённого состояния. Поэтому функцию пластичности можно определить по диаграмме одноосного растяжения образца из исследуемого материала.

Постулат Друкера гласит, что при любом заданном значении компонентов приращения пластических деформаций приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ имеет максимальное значение для действительного напряжённого состояния по сравнению со всеми возможными состояниями, удовлетворяющими условию $f(\sigma_{ij}, q) < 0$

Компоненты приращения пластической деформации являются функциями тензора напряжений. Поэтому приращение работы пластической деформации $\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ также в конечном счёте является функцией напряжений, однако они не являются независимыми, так как удовлетворяют условию пластичности $f(\sigma_{ij}, q) = 0$. Поэтому условие относительного максимума функции приращения пластической работы по способу множителей Лагранжа запишутся в виде:

$$\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} (\sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}^p - d\lambda \cdot f) = 0, \text{ где} \quad (3.3)$$

$d\lambda$ – множитель Лагранжа. Отсюда следует, что

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}.$$

Перейдём от тензорной символики к матричной. Вместо тензора напряжений и деформаций будем использовать векторы:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T \text{ и } \{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T.$$

Допускаем, что приращение полной деформации можно представить в виде суммы упругой и пластической деформации $\{d\varepsilon\} = \{d\varepsilon^e\} + \{d\varepsilon^p\}$. Причём

$\{d\varepsilon^e\} = [D]^{-1} \cdot \{d\sigma\}$, где $[D]^{-1}$ – матрица, обратная к матрице упругости, а $\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}}$.

Введём обозначение $\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} = \left\{ \frac{\partial f}{\partial \sigma_x}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_y}, \frac{\partial f}{\partial \sigma_z}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xy}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{yz}}, \frac{\partial f}{\partial \tau_{xz}} \right\}^T = \{a\}$.

Тогда $\{d\varepsilon^p\} = d\lambda \cdot \{a\}$.

Вычислим полный дифференциал функции пластичности

$$df(\{\sigma\}, q) = \left(\frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \right)^T \cdot d\{\sigma\} + \frac{\partial f}{\partial q} dq = \{a\}^T \cdot d\{\sigma\} - A \cdot d\lambda = 0, \text{ где } A = -\frac{1}{d\lambda} \cdot \frac{\partial f}{\partial q} dq.$$

Общее выражение для связи приращения деформаций и напряжений упруго-пластических материалов в матричном виде следующее:

$$\{d\varepsilon\} = [D]^{-1} \cdot d\{\sigma\} + d\lambda \cdot \frac{\partial f}{\partial \{\sigma\}} \quad (3.4)$$

Умножим это соотношение на $\{a\}^T [D]^{-1}$

$$\{a\}^T [D] \cdot \{d\varepsilon\} = \{a\}^T [D] \cdot [D]^{-1} \cdot \{d\sigma\} + \{a\}^T [D] \cdot d\lambda \cdot \{a\}$$

Учтём, что $\{a\}^T \{d\sigma\} = A \cdot d\lambda$. Тогда $d\lambda = \frac{\{a\}^T [D] \cdot \{d\varepsilon\}}{A + \{a\}^T [D] \cdot \{a\}}$.

Подставим значение $d\lambda$ в уравнение (3.4), умноженное на $[D]$:

$$[D] \{d\varepsilon\} = \{d\sigma\} + [D] \cdot \frac{\{a\}^T [D] \cdot \{d\varepsilon\}}{A + \{a\}^T [D] \cdot \{a\}} \cdot \{a\},$$

откуда

$$\begin{aligned} \{d\sigma\} &= [D] \{d\varepsilon\} - \frac{[D] \{a\} \{a\}^T [D]}{A + \{a\}^T [D] \{a\}} \cdot \{d\varepsilon\} = \\ &= \left([D] - \frac{[D] \{a\} \cdot ([D] \{a\})^T}{A + \{a\}^T \cdot [D] \{a\}} \right) \cdot \{d\varepsilon\} = [D]_{ep} \cdot \{d\varepsilon\} \end{aligned}$$

где $[D]_{ep} = [D] - [D]_p$ – упругопластическая матрица;

матрица $[D]_p$ – матрица пластического течения.

$$[D]_p = \frac{([D] \{a\}) \cdot ([D] \{a\})^T}{A + \{a\}^T \cdot [D] \{a\}} \quad (3.5)$$

В таком виде вычислять упругопластическую матрицу довольно сложно. Можно получить более простую формулу её вычисления. Для этого воспользу-

емся тем, что примем функцию пластического течения в форме условия течения Хубера – Мизеса. Для этого случая известна тензорная зависимость, приведённая, например, в [78]:

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2 \cdot G} \cdot (d\sigma_{ij} - \delta_{ij} \cdot \frac{3 \cdot \mu}{1 + \mu} \cdot d\sigma_0) + \frac{3}{2} \cdot \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} \cdot s_{ij}.$$

Выразим из этой зависимости $d\sigma_{ij}$:

$$d\sigma_{ij} = 2G \cdot d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \cdot \frac{3\mu}{1 + \mu} \cdot d\sigma_0 - 3G \cdot \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} \cdot s_{ij}.$$

Учтём, что:

$$\delta_{ij} \cdot \frac{3\mu}{1 + \mu} \cdot d\sigma_0 = \delta_{ij} \cdot \frac{3\mu}{1 + \mu} \cdot 3K \cdot d\varepsilon_0 = \delta_{ij} \cdot \frac{3\mu}{1 + \mu} \cdot \frac{3E}{3 \cdot (1 - 2\mu)} \cdot d\varepsilon_0 = 2G \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{3\mu}{1 - 2\mu} \cdot d\varepsilon_0.$$

Из теории течения известно соотношение: $d\varepsilon_{kl}^p = \frac{3}{2} \cdot \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} \cdot s_{kl}$. Умножим его

на s_{ij} и выполним некоторые преобразования.

$$d\varepsilon_{kl}^p \cdot s_{ij} = \frac{3}{2} \cdot \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} \cdot s_{kl} \cdot s_{ij} \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot \frac{\overline{d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} = \frac{d\varepsilon_{kl}^p \cdot s_{kl}}{s_{kl} \cdot s_{kl}}.$$

Из теории пластичности известно, что $s_{kl} \cdot s_{kl} = \frac{2}{3} \cdot \sigma_i^2$. Преобразуем числитель дроби.

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{kl}^p \cdot s_{kl} &= (d\varepsilon_{kl} - de_{kl}^e - d\varepsilon_0 \cdot \delta_{kl}) \cdot s_{kl} = d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - de_{kl}^e \cdot s_{kl} - d\varepsilon_0 \cdot \delta_{kl} \cdot s_{kl} = \\ &= d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - de_{kl}^e \cdot s_{kl} - d\varepsilon_0 \cdot (s_x + s_y + s_z) = d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - de_{kl}^e \cdot s_{kl} \end{aligned}$$

Для компонент девиатора упругих приращений деформаций верно соотношение $de_{kl} = \frac{ds_{kl}}{2G}$.

Тогда:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - de_{kl}^e \cdot s_{kl} &= d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - \frac{ds_{kl} \cdot s_{kl}}{2 \cdot G} = d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d(s_{kl} \cdot s_{kl})}{2 \cdot G} = d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - \frac{1}{2} \cdot \frac{d(\frac{2}{3} \sigma_i^2)}{2 \cdot G} = \\ &= d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} - \frac{\sigma_i \cdot d\sigma_i}{3 \cdot G} = d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} \cdot \left(1 - \frac{1}{3 \cdot G} \cdot \frac{\sigma_i \cdot d\sigma_i}{d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl}} \right) \end{aligned}$$

Преобразуем выражение

$$d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl} = d\varepsilon_{kl}^p \cdot s_{kl} + de_{kl}^e \cdot s_{kl} = \frac{3}{2} \cdot \frac{d\varepsilon_i^p}{\sigma_i} \cdot s_{kl} \cdot s_{kl} + \frac{ds_{kl} \cdot s_{kl}}{2G} = \overline{d\varepsilon_i^p} \cdot \sigma_i + \frac{1}{3G} \cdot \sigma_i \cdot d\sigma_i.$$

Тогда выражение в скобках примет вид:

$$1 - \frac{1}{3G} \cdot \frac{\sigma_i \cdot d\sigma_i}{d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl}} = 1 - \frac{1}{3G} \cdot \frac{\sigma_i \cdot d\sigma_i}{\overline{d\varepsilon_i^p} \cdot \sigma_i + \frac{1}{3G} \cdot \sigma_i \cdot d\sigma_i} = 1 - \frac{1}{3G} \cdot \frac{d\sigma_i}{\overline{d\varepsilon_i^p} + \frac{1}{3G} \cdot d\sigma_i}.$$

Введём обозначение $H = \frac{d\sigma_i}{\overline{d\varepsilon_i^p}}$. Получим:

$$1 - \frac{1}{3G} \cdot \frac{\sigma_i \cdot d\sigma_i}{d\varepsilon_{kl} \cdot s_{kl}} = 1 - \frac{1}{3G} \cdot \frac{H}{1 + \frac{1}{3G} \cdot H} = 1 - \frac{H}{3G + H} = \frac{3G + H - H}{3G + H} = \frac{1}{1 + \frac{H}{3G}}.$$

Теперь можно выразить приращения напряжений:

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij} &= 2G \cdot d\varepsilon_{ij} + 2G \cdot \delta_{ij} \cdot \frac{3 \cdot \mu}{1 - 2 \cdot \mu} \cdot d\varepsilon_o - 2G \cdot \frac{s_{ij} \cdot s_{kl}}{\frac{2}{3} \cdot \sigma_i^2} \cdot \frac{d\varepsilon_{kl}}{1 + \frac{H}{3 \cdot G}} = \\ &= 2G \cdot \left(d\varepsilon_{ij} + \delta_{ij} \cdot \frac{3 \cdot \mu}{1 - 2 \cdot \mu} \cdot d\varepsilon_o - \frac{s_{ij} \cdot s_{kl}}{\frac{2}{3} \cdot \sigma_i^2} \cdot \frac{d\varepsilon_{kl}}{1 + \frac{H}{3 \cdot G}} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Первые два слагаемые в скобках – линейные соотношения закона Гука. Представим напряжения в виде $d\sigma_{ij} = d\sigma_{ij}^e - d\sigma_{ij}^p$, где $d\sigma_{ij}^e$ - напряжения выражаемые законом Гука, а $d\sigma_{ij}^p$ – добавочные напряжения, получаемые в результате пластического течения. В матричном виде получено выражение $d\{\sigma^e\} = [D]\{d\varepsilon\}$, где $[D]$ – матрица упругости.

Для получения матричной зависимости для пластической составляющей вычислим

$$s_{kl} \cdot d\varepsilon_{kl} = s_x \cdot d\varepsilon_x + s_y \cdot d\varepsilon_y + s_y \cdot d\varepsilon_y + s_{xy} \cdot d\gamma_{xy} + s_{yz} \cdot d\gamma_{yz} + s_{xz} \cdot d\gamma_{xz}.$$

Отсюда можно получить соотношения $d\{\sigma^p\} = [D_p]\{d\varepsilon\}$, где $[D_p]$ – пластическая матрица.

$$[D_p] = \frac{2G}{\frac{2}{3} \sigma_i^2 \cdot \left(1 + \frac{H}{3G}\right)} \cdot \{s\} \{s\}^T = \frac{3G}{\sigma_i^2 \cdot \left(1 + \frac{H}{3G}\right)} \cdot \{s\} \{s\}^T \quad (3.7)$$

Выясним смысл коэффициента H .

Как показано ранее единая диаграмма деформирования на диаграмме растяжения материала представляется в виде $\sigma = \Phi(\varepsilon^p)$. Следовательно,

$$H = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon^p} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e}.$$

Согласно закону Гука для одноосного растяжения $d\varepsilon^e = \frac{d\sigma}{E}$. Тогда $\frac{d\sigma}{d\varepsilon - d\varepsilon^e} = \frac{d\sigma}{d\varepsilon - \frac{d\sigma}{E}} = \frac{d\sigma/d\varepsilon}{1 - \frac{1}{E} \cdot d\sigma/d\varepsilon}$. Введём обозначение $m = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{d\varepsilon}$.

Тогда

$$H = \frac{d\sigma_i}{d\varepsilon_i^p} = \frac{m \cdot E}{1 - m} \quad (3.8)$$

Полученное соотношение для матрицы $[D_p]$ известно как матрица Ямады [32]. Оно является основой для решения упруго-пластических задач в МКЭ. Параметр упрочнения, коэффициент H , удобно аппроксимировать кусочно-линейной зависимостью, как это делается в [99]. На ее основе написаны компоненты программного комплекса DSMFem, с помощью которых были решены некоторые задачи.

3.3.3. Алгоритм решения упруго-пластической задачи методом конечных элементов

Алгоритм решения упруго-пластической задачи с использованием матрицы Ямады приводится в работе [32]. Его суть сводится к следующему.

1. К модели прикладывается произвольная пробная нагрузка, вычисляются деформации, напряжения. Все решения масштабируются таким образом, чтобы максимальное напряжение в одном из элементов соответствовало пределу текучести материала. Масштабным коэффициентом является $r_b = Y/\sigma'_{\max}$, где Y - предел текучести материала, σ'_{\max} - максимальное напряжение в одном из элементов. При этом $\{L_0\}$ - величина пробной нагрузки, соответствующая пределу текучести.

2. Подбирается минимальная величина приращения нагрузки $\{\Delta L^T\}$, достаточная для появления текучести в очередном элементе.

3. Производится проверка положительности приращения пластической деформации $\overline{\Delta\varepsilon}^p$ для всех элементов с текучестью. Если $\overline{\Delta\varepsilon}^p > 0$, то решение повторяется с пункта 2, иначе вычисления останавливаются.

Этот алгоритм может успешно применяться для решения задач статики, но его нельзя применить напрямую при решении контактной задачи. В связи с тем, что область контакта изменяется в процессе решения, в задаче нет линейного участка, в пределах которого можно увеличивать тестовую нагрузку до появления текучести в каком-нибудь элементе. Кроме того, при использовании элементов, отличных по свойствам от обычного элемента в форме тетраэдра (для объемной задачи) или от треугольного (в плоской задаче), поле напряжений в пределах одного элемента непостоянно. Вследствие этого нельзя говорить о появлении текучести в элементе, появление текучести происходит в части элемента, которая связана с точкой интегрирования. Поэтому число степеней нагружения при отслеживании появления текучести в очередных точках модели должно быть равно числу элементов в схеме, умноженному на число областей, которые могут независимо входить в пластику (точек интегрирования). В случае использования объемного 8-узлового элемента количество точек интегрирования составляет 27, и число степеней нагружения может составить сотни тысяч. На каждой из этих степеней потребуется решать контактную задачу для всей модели. Это чрезвычайно трудоемкий способ решения, который неприемлем по временным затратам. В связи с этим алгоритм несколько модифицирован. Нагрузка разделяется на порции и прикладывается к системе за несколько шагов.

Решение нелинейной задачи методом пошагового нагружения математически эквивалентно решению дифференциального уравнения методом Эйлера, погрешность которого полностью исключить нельзя. В рассматриваемой задаче это проявляется в том, что условие текучести выполняется не точно, и напряжения в элементах (σ_i) оказываются выше, чем должны быть в соответствии с диаграммой деформирования материала. Это, однако, позволяет оценивать погрешность решения и выбирать необходимое количество шагов нагружения.

Оно зависит от того, насколько сильно напряжения в детали превышают величину заложенного в задачу предела текучести материала, и выбирается достаточно большим (обычно 30...400 и более). Следует отметить, что даже значительное повышение напряжений на одном шаге нагружения практически не сказывается на значениях перемещений узлов и общем распределении напряжений в исследуемом объекте.

3.4. Тестирование алгоритмов решения задач статики в упруго-пластической постановке

3.4.1. Растяжение полосы с V-образным надрезом

В качестве первого теста было рассмотрено растяжение стальной полосы с V-образным вырезом. Этот пример приводится в литературных источниках [32, 60]. В расчет заложена диаграмма деформирования материала, состоящая из двух линейных участков. Предел текучести составляет 300 МПа, упрочнение отсутствует. В связи с симметрией задачи расчет проведен для четверти полосы. На рис. 3.9 показана схема приложения нагрузки и линии эквивалентных напряжений. Связи наложены на левую и нижнюю стороны пластины, растягивающая нагрузка приложена к верхней стороне.

В зависимости от величины приложенной нагрузки меняется зона пластических деформаций. На рис. 3.9 приведены границы области пластических деформаций для нагрузки, уменьшенной на 10% от предельной и от предельной нагрузки. Изолинии соответствуют эквивалентным напряжениям по IV теории прочности 300, 295 и 290 МПа. Область пластических деформаций хорошо соответствует результатам решения, приведенным в [32].

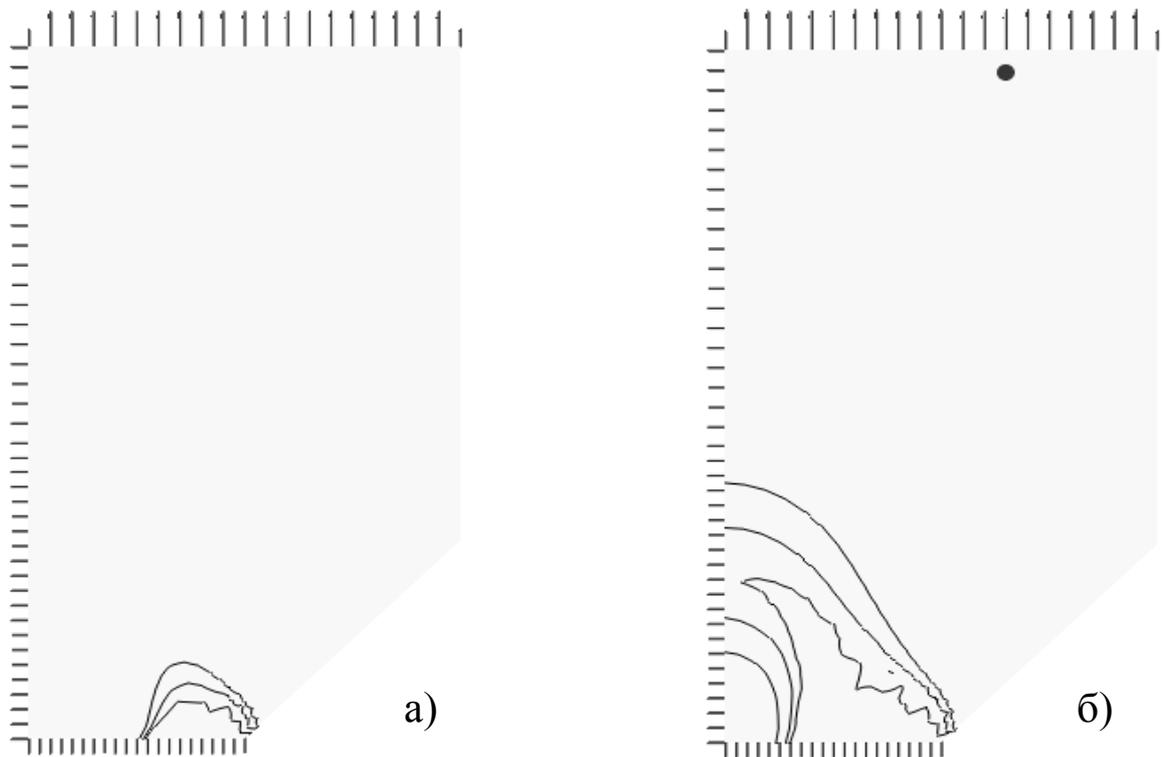


Рис. 3.9. Линии равных эквивалентных напряжений в зоне пластических деформаций при растяжении пластины с надрезом:
 а - нагрузка 0,9 от предельной, б – предельная нагрузка

3.4.2. Моделирование испытания на твердость по методу Бринеля

В качестве теста для оценки точности работы алгоритма решения упруго-пластической контактной задачи было смоделировано испытание образца на твердость по методу Бринеля.

Для адекватной оценки точности расчета необходимо располагать параметрами материала, полученными при экспериментальных испытаниях образцов. В данном случае для определения параметров материала были проведены стандартные испытания на разрыв. При испытаниях на разрыв использовался стальной образец длиной 78 мм диаметром 8 мм. В ходе испытаний была получена машинная диаграмма (рис. 3.10). Ее полигональная аппроксимация (рис. 3.11) использовалась при решении задач в упруго-пластической постановке в рамках данной работы. Маркерами показаны значения, которые использовались при аппроксимации.

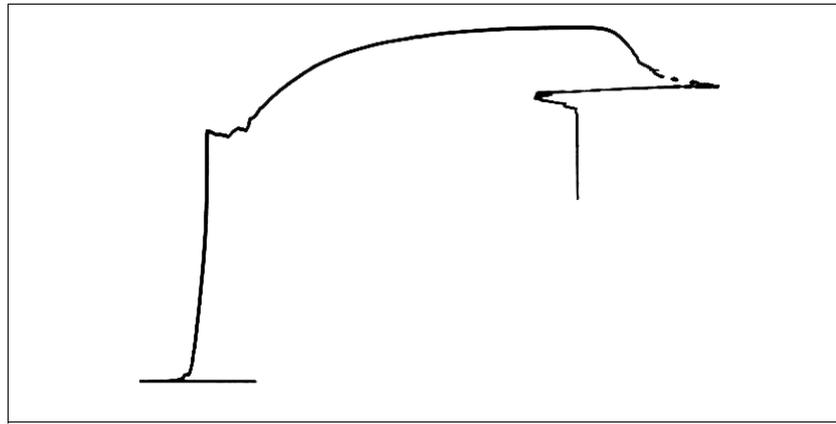


Рис. 3.10. Машинная диаграмма деформирования, полученная при испытаниях образца на разрыв

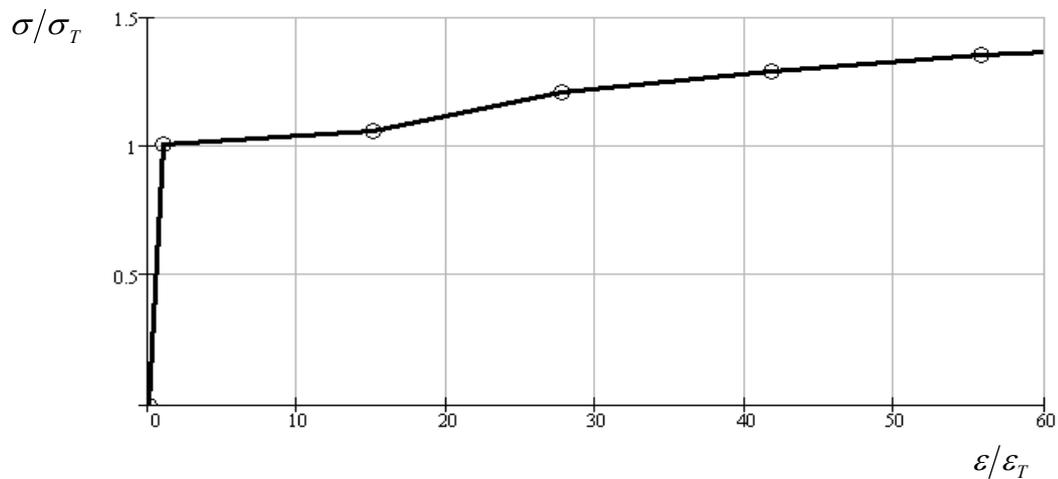


Рис. 3.11. Полигональная аппроксимация машинной диаграммы

Параметры, полученные при испытаниях, приведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

Параметры материала, полученные экспериментально

Предел текучести, σ_T , МПа	303,57
Предел прочности, $\sigma_{вр}$, МПа	409,82
Относительное удлинение, δ , %	26,92
Относительное сужение, ψ , %	68,36

Для экспериментального измерения твердости использовался образец, имеющий диаметр 18 мм и высоту 9 мм, выполненный из того же куска материала, что и образец для испытания на разрыв. На образец при помощи стального шарика диаметром $d_{ш} = 10$ мм передавалось усилие $P = 30$ кН. В экспери-

менте диаметр отпечатка составил $d_o = 5,6$ мм, что соответствует значению твердости по Бринелю 111 НВ.

На основе экспериментально полученных параметров материала было смоделировано испытание на твердость. В силу симметричности задачи расчет проводился для $\frac{1}{4}$ части объекта. Модель построена из 8-узловых объемных конечных элементов. В связи с тем, что в зоне образца, где происходит внедрение шарика, градиент напряжений и деформаций высок, конечноэлементная сетка вблизи поверхности образца измельчена для получения более точного решения. По мере удаления от поверхности контакта характерный размер конечных элементов меняется от 0,1 мм до 1,3 мм, как показано на рис. 3.12. На поверхности контакта элементы имеют форму, близкую к кубической, с характерным размером 0,1...0,165 мм. Модель содержит 18400 элементов и 20672 узла. На нижнюю поверхность цилиндра наложены связи, запрещающие перемещения по всем направлениям. Нагружение осуществлялось кинематически. Узлам верхней поверхности модели шарика сообщалось перемещение, равное 0,95 мм, что на 10% превосходит глубину отпечатка, оставленного шариком на образце при измерении твердости. Конечноэлементная модель показана на рис. 3.12.

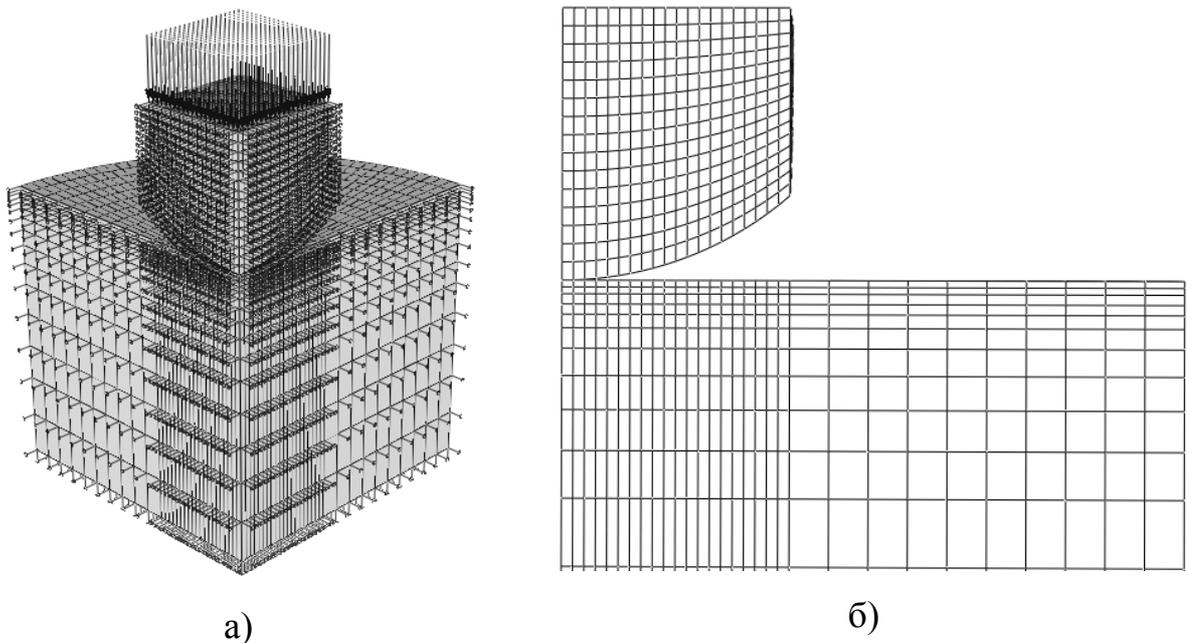


Рис. 3.12. Моделирования измерения твердости образца:

а – модель со связями и нагрузками, б – измельчение конечноэлементной сетки вблизи поверхности образца в зоне контакта

В результате расчета были вычислены распределения контактных давлений при разных нагрузках, предельное положение шарика при максимальной нагрузке и форма вмятины в образце после снятия нагрузки. Размер отпечатка, полученный в результате расчета, отличается от отпечатка, полученного экспериментально менее, чем на 6%. Распределение контактных давлений и вид остаточной деформации приведен на рис.3.13. На рисунке видно, что контактные давления по поверхности вмятины практически постоянны.

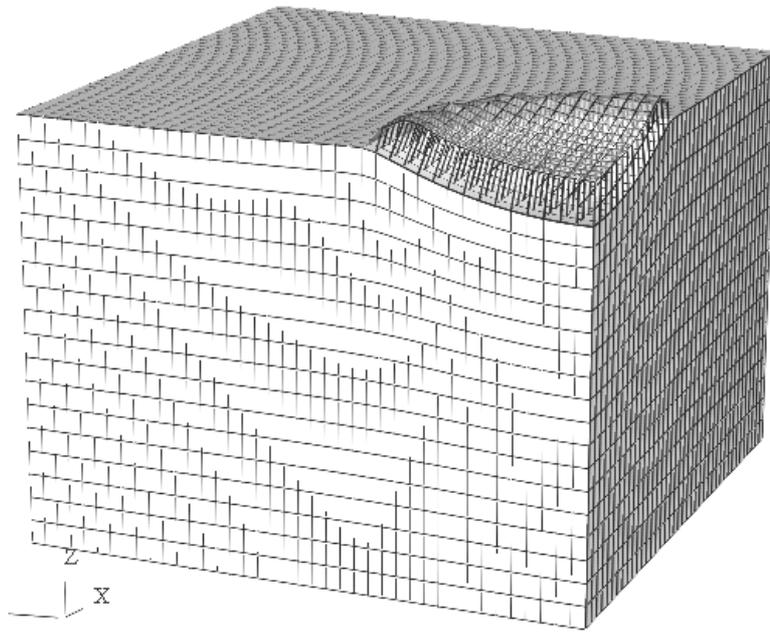


Рис. 3.13. Распределение контактных давлений и остаточная деформация

Среднее давление в контакте соответствует значению твердости 114 НВ.

Приведенные тесты доказывают работоспособность алгоритма решения контактной упруго-пластической задачи.

3.5. Построение силовых характеристик шероховатого слоя при решении задачи в упруго-пластической постановке

При решении нормальной контактной задачи для базовых моделей с шероховатыми поверхностями в упруго-пластической постановке оценивались те же параметры, что и при решении упругой задачи:

1. номер шага нагружения;
2. вертикальное смещение верхней поверхности модели;
3. сближение моделей, обусловленное шероховатостью поверхностей;

4. суммарное нормальное контактное усилие;
5. номинальное давление;
6. относительная фактическая площадь контакта.

Поскольку именно результат решения упруго-пластической задачи представляет интерес для использования в дальнейших расчетах реальных объектов, для упрощения введения их в расчеты силовые характеристики аппроксимированы простыми аналитическими зависимостями вида $p = c\alpha^x$, связывающие сближение α (в мкм) и давление p (в МПа). Значения параметров c и x подобраны с использованием метода наименьших квадратов. При аппроксимации расчетных силовых характеристик средняя относительная погрешность составила менее 1%, максимальная ошибка не превосходит 5,25%.

Силовые характеристики, полученные в результате решения контактной упруго-пластической задачи для базовых моделей с поверхностями №1 (табл. 3.2) и их аппроксимации приведены в табл. 3.5 и на рис. 3.14-3.15. Сплошными линиями показаны расчетные кривые, пунктирными – графики аппроксимирующих выражений; для сравнения приведены также расчетные кривые для упругих решений (штриховые линии). Остальные результаты для базовых моделей приведены в Приложении 2.

Таблица 3.5

Результаты решения для моделей с поверхностями №1 и №2

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_C , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,219	0,218	18,6	0,085	0,078
2	0,438	0,437	58,8	0,269	0,134
3	0,656	0,655	125,5	0,574	0,301
4	0,875	0,874	200,4	0,916	0,368
5	1,094	1,092	270,7	1,238	0,480
6	1,313	1,310	363,4	1,662	0,647
7	1,531	1,527	552,2	2,524	1,127
8	1,750	1,744	926,3	4,235	1,907
9	1,969	1,959	1455,0	6,653	3,157
10	2,188	2,173	2176,0	9,950	4,796

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
11	2,406	2,385	3026,0	13,8	6,570
12	2,625	2,598	4002,0	18,3	8,511
13	2,844	2,809	5119,0	23,4	11,150
14	3,063	3,018	6455,0	29,5	14,070
15	3,281	3,226	7999,0	36,6	17,280
16	3,500	3,433	9740,0	44,5	21,140
17	3,719	3,639	11690,0	53,5	25,280
18	0,938	3,843	13840,0	63,3	29,480
19	4,156	4,046	16080,0	73,5	33,890
20	4,375	4,248	18460,0	84,4	37,970
21	4,594	4,450	20920,0	95,7	42,590
22	4,813	4,651	23520,0	107,5	47,250
23	5,031	4,852	26160,0	119,6	51,590
24	5,250	5,052	28830,0	131,8	55,720
25	5,469	5,253	31520,0	144,1	59,430
26	5,688	5,453	34260,0	156,7	63,160
27	5,906	5,652	37030,0	169,3	66,390
28	6,125	5,852	39810,0	182,0	69,250
29	6,344	6,051	42630,0	194,9	71,870
30	6,563	6,251	45450,0	207,8	74,340
31	6,781	6,450	48310,0	220,9	76,560
32	7,000	6,649	51210,0	234,2	78,860

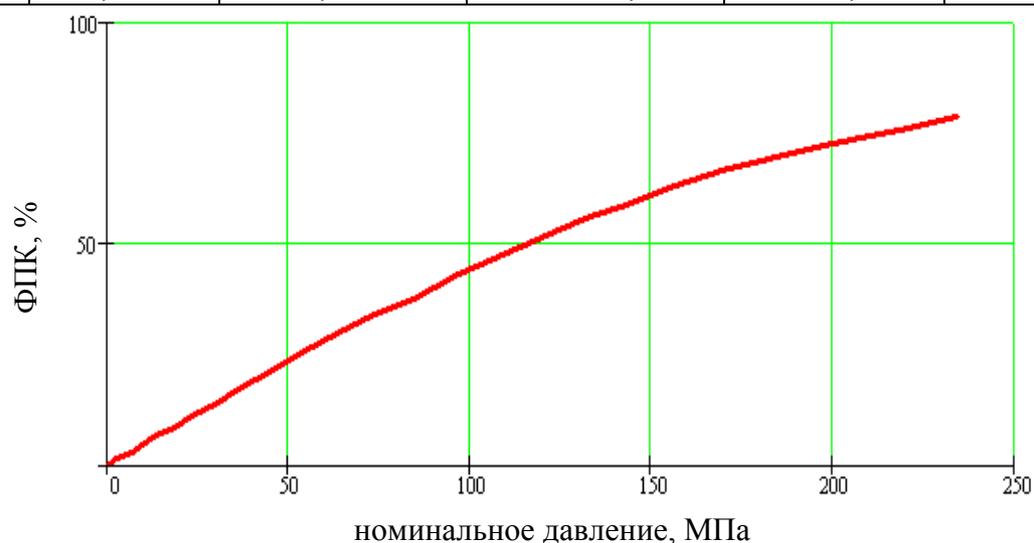


Рис. 3.14. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №1 и №2

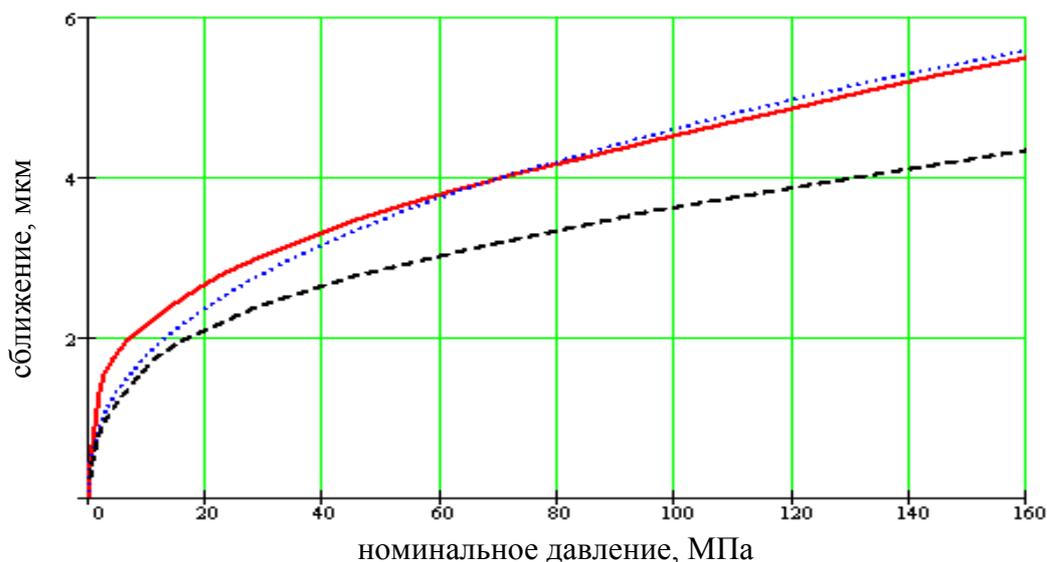


Рис. 3.15. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №1. Параметры аппроксимации: $c = 2,431$; $x = 2,433$.

Сближения моделей с рассмотренными шероховатыми поверхностями хорошо согласуются с аналогичными данными, приведенными в работе [103].

3.6. О характере распределения пятен контакта

В ходе проведения пошаговых расчетов можно было наблюдать формирование и развитие областей контакта с увеличением нагрузки, появление отдельных пятен контакта и процесс их слияния. Этой проблеме посвящено большое количество работ разных авторов, например [72, 44] и др. Такие наблюдения представляют собой определенную ценность, поскольку они сделаны при расчете тел, поверхностный слой которых смоделирован на основании данных профилометрии для реального участка поверхности, а не для отдельных трасс, как это делается обычно.

Рассмотрим подробно процесс образования и развития фактических областей контакта при контактировании двух поверхностей с параметрами шероховатости, полученными как математические ожидания соответствующих величин по пяти трассам $Ra=0,41$ мкм, $Sm=101$ мкм, $Rz=1,5$ мкм (поверхности №1 в табл. 3.2). Эти поверхности избраны для более детального рассмотрения как довольно типичные. Решение проводилось в упруго-пластической постановке. На рис. 3.16-3.17 представлены области фактического контакта. Черными точками показаны узлы поверхности, вошедшие в контакт. На рис. 3.16 а показаны

области фактического контакта, соответствующие нагружению базовых моделей номинальным давлением 0,124 МПа. Фактическая площадь контакта в этом случае составляет 0,145%. Наблюдается контактирование поверхностей по отдельным неровностям, пятна контакта расположены на расстоянии 400-500 мкм друг от друга. При номинальном давлении 3,568 МПа количество пятен в местах появления первых контактов значительно увеличилось (рис. 3.16 б). Фактическая площадь контакта возросла до 3,101%. Явно обозначились две области, где сгруппировались все пятна. Можно предположить, что эти области обусловлены наличием волнистости поверхности. Фактические области контакта располагаются в то же время по вершинам неровностей, обусловленных шероховатостью, но поскольку контактов мало, по ним нельзя составить представление о расположении вершин неровностей. Внутри больших областей наблюдаются области контакта, близкие по форме к кругам.

С ростом номинального давления отдельных контактов становится все больше и намечается тенденция к объединению отдельных контактов. При номинальном давлении 20,73 МПа фактическая площадь контакта охватывает 19,25% номинальной площади контактной поверхности базовой модели и можно говорить о массовом характере взаимодействия отдельных пятен контакта. Пятна располагаются рядами поперек длинной стороны поверхности контакта в соответствии с расположением следов обработки (рис. 3.16 в), однако фактическая площадь контакта по-прежнему довольно невелика и следы обработки прослеживаются не очень хорошо. С дальнейшим увеличением номинального давления происходит объединение отдельных пятен контакта внутри областей (рис. 3.16 г), становятся четко видны следы обработки в виде рядов пятен контакта. Контактные области объединяют в себе много отдельных контактов, имеют сложную конфигурацию и не напоминают Герцевский контакт.

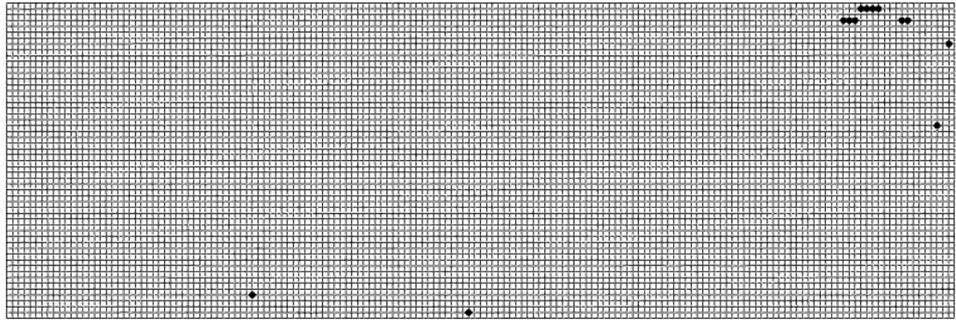
Насыщение контакта до относительной фактической площади, равной 60%, происходит лишь по достижении номинального давления в 63,15 МПа (рис. 3.17 а). При увеличении номинального давления до 80 МПа ФПК достигает 75% (рис. 3.17 б), области контакта начинают сливаться почти на всей по-

верхности контакта. С повышением давления еще на 15 МПа картина меняется уже не столь значительно и ФПК не превышает 85%. При более высоких давлениях она почти достигает 90%, однако это уже не представляет большого интереса.

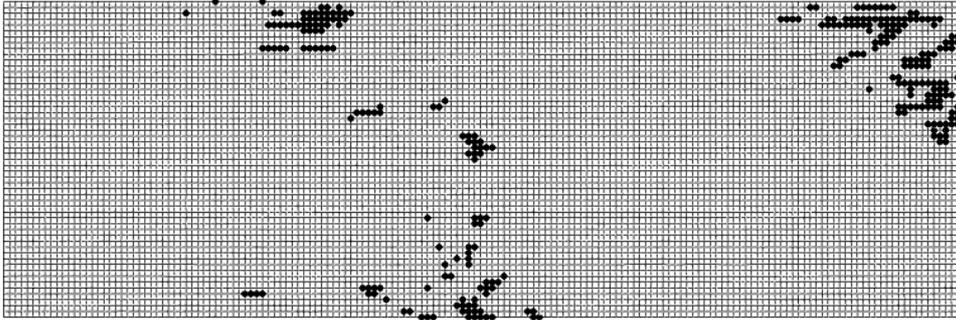
На рис. 3.18-3.19 показаны эпюры контактных давлений для тех же этапов развития пятен контакта. Хорошо просматривается рельеф поверхности, как шероховатость, так и волнистость. Благодаря этому увеличивается наглядность и объяснимость закономерностей изменения конфигурации пятен контакта.

Из анализа рисунков видно, что наличие двух четко выраженных зон контакта, расположенных в средней части базовой модели и на ее правом краю, объясняется волнистостью поверхностей, причем волны ориентированы под углом, близким к 45° по отношению к неровностям, образующим шероховатость поверхности. Высота волн оказывается достаточной для того, чтобы даже при номинальном давлении, достигающем 60-70 МПа, области поверхности, приходящиеся на впадины волн, не находились в контакте.

Можно сделать вывод о том, что волнистость на поверхностях контакта может оказывать основное влияние на такие эксплуатационные характеристики деталей машин, как плотность соединений, усталостная прочность, жидкостное и граничное трение, что соответствует сведениям, приведенным в работе [89].



а)



б)

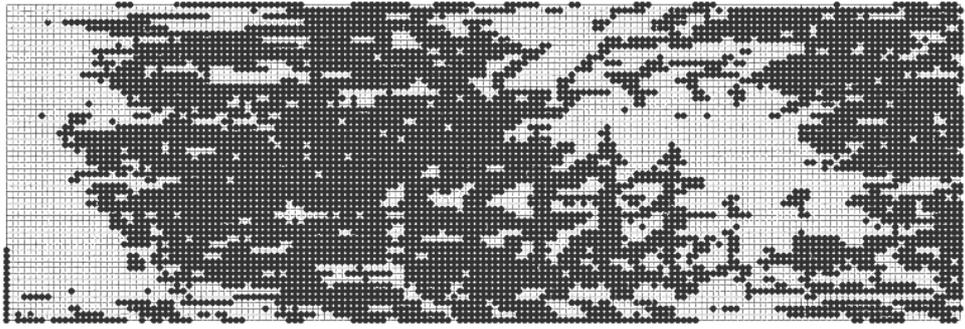


в)



г)

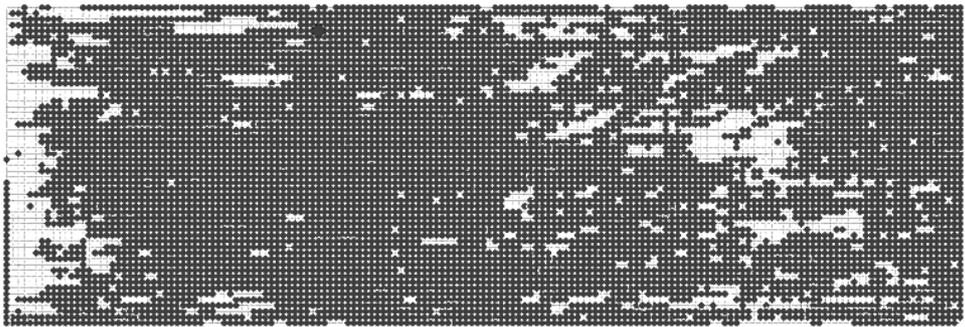
Рис. 3.16. Развитие областей контакта для поверхностей №1:
 а - $p_n=0,124$ МПа, $A_R=0,145\%$, б - $p_n=3,568$ МПа, $A_R=3,101\%$,
 в - $p_n=20,730$ МПа, $A_R=19,250\%$, г - $p_n=41,390$ МПа, $A_R=38,840\%$



а)

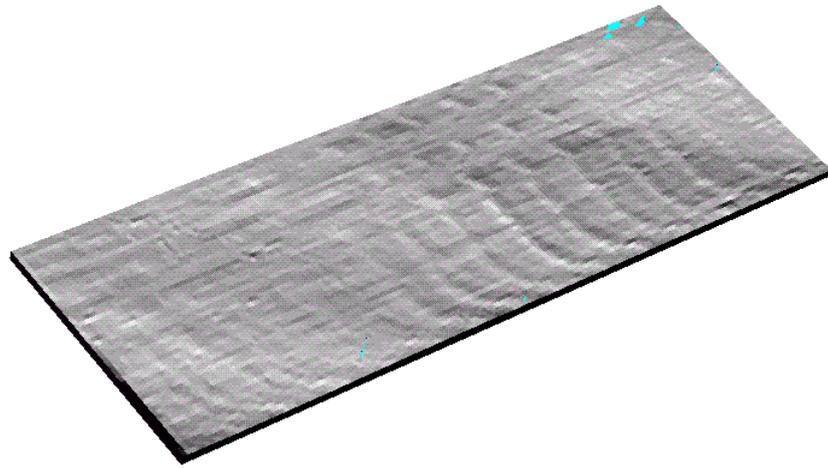


б)

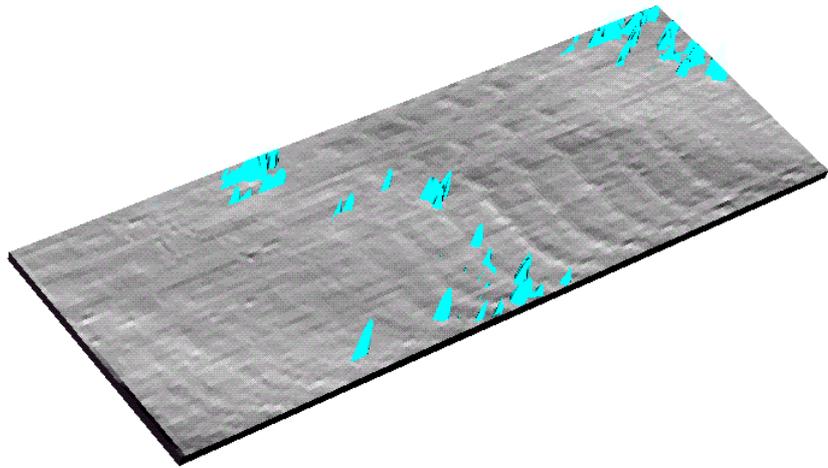


в)

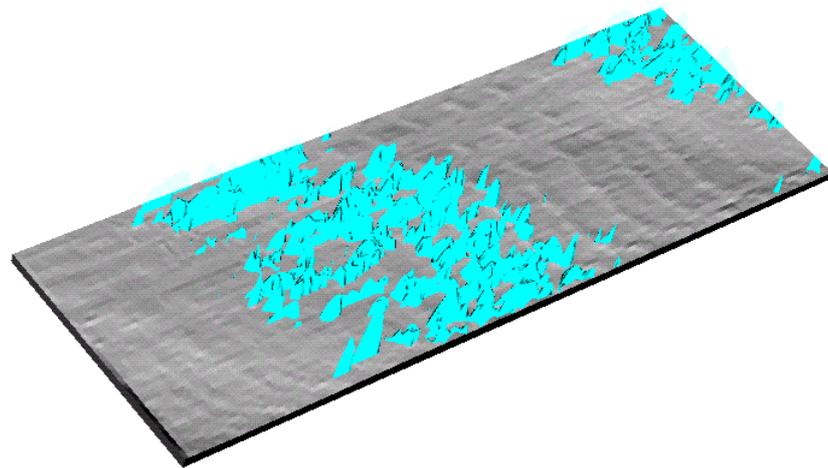
Рис. 3.17. Развитие областей контакта для поверхностей №1:
а - $p_n=63,150$ МПа, $A_R=59,750\%$, б - $p_n=80,160$ МПа, $A_R=75,150\%$,
в - $p_n=95,470$, $A_R=84,811\%$



а)

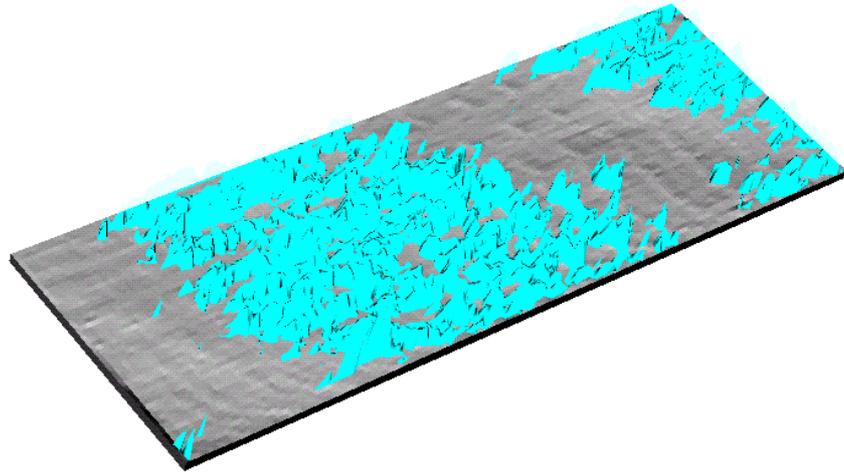


б)

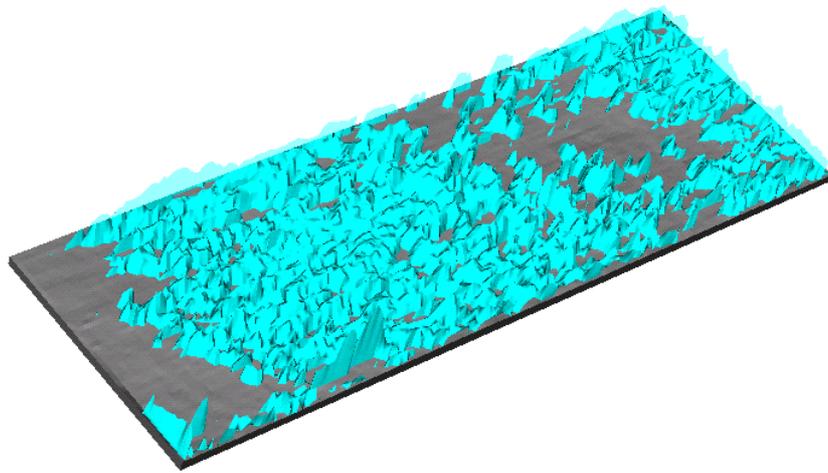


в)

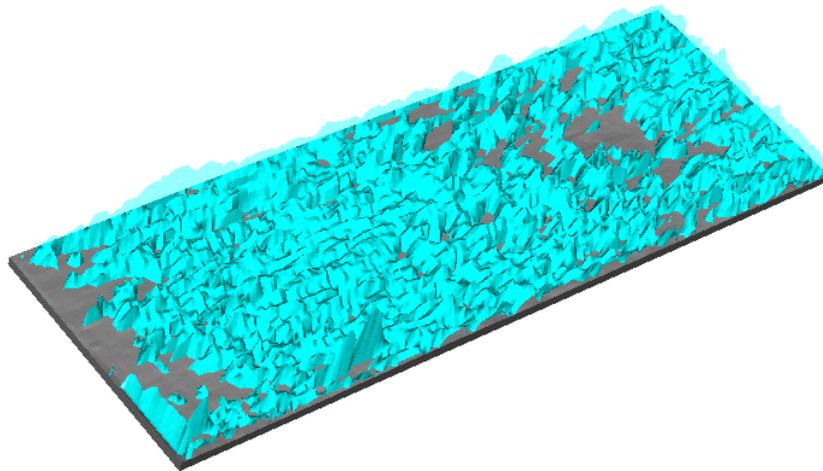
Рис. 3.18. Эпюры контактных давлений для поверхностей №1:
а - $p_n=0,124$ МПа, $A_R=0,145\%$, б - $p_n=3,568$ МПа, $A_R=3,101\%$,
в - $p_n=20,730$ МПа, $A_R=19,250\%$, г - $p_n=41,390$ МПа, $A_R=38,840\%$



а)



б)

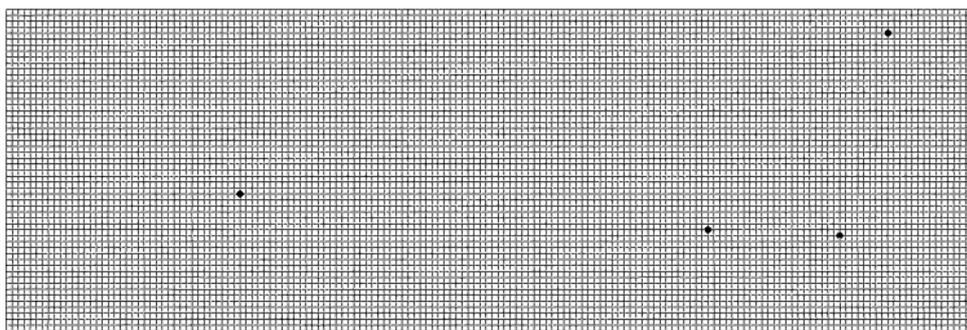


в)

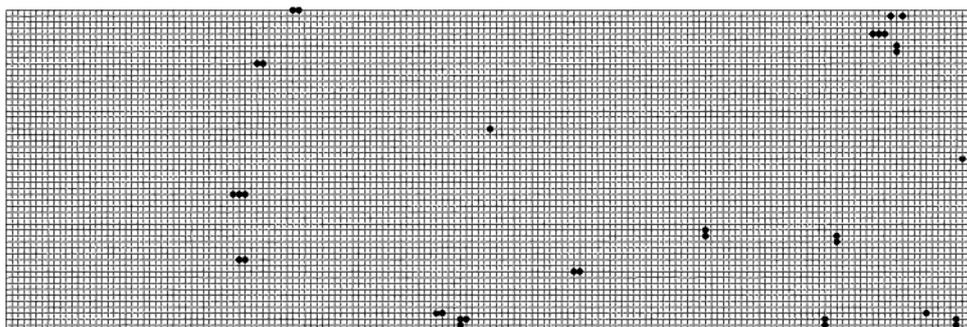
Рис. 3.19. Эпюры контактных давлений для поверхностей №1:
а - $p_n=63,150$ МПа, $A_R=59,750\%$, б - $p_n=80,160$ МПа, $A_R=75,150\%$,
в - $p_n=95,470$, $A_R=84,811\%$

В случае контакта относительно гладкой поверхности с более грубой наблюдается несколько иная картина. На рис. 3.20-3.21 показаны линии равных эквивалентных напряжений и эпюры контактных давлений, возникающие при контакте поверхностей №1 и №3 в табл. 3.2. Более грубая поверхность имеет следующие параметры шероховатости: $R_a = 1,35$ мкм, $S_m = 86.14$ мкм, $R_z = 8.60$ мкм. В связи с тем, что одна из поверхностей имеет значительно более высокие микронеровности, чем другая, характер развития пятен контакта определяет именно она. С первых же шагов появляется три точечных контакта на больших расстояниях друг от друга (рис. 3.20 а). Номинальное давление при этом мало и составляет около 0,1 МПа. Поскольку относительно высоких неровностей много, волнистость не проявляется. С увеличением нагрузки точечные контакты появляются на всей поверхности контакта (рис. 3.20 в), образуя при номинальном давлении около 25 МПа четко различимые ряды вдоль короткой стороны модели, обусловленные спецификой обработки. При этом ФПК достигает 6,3%. Дальнейшее увеличение нагрузки приводит к тому, что происходит равномерное насыщение контакта за счет более мелких неровностей обеих поверхностей (рис. 3.20 г - 3.21 а), однако ФПК даже при давлении свыше 100 МПа не достигает значений, полученных при контакте двух относительно гладких поверхностей, что вполне закономерно (рис. 3.21 б - в).

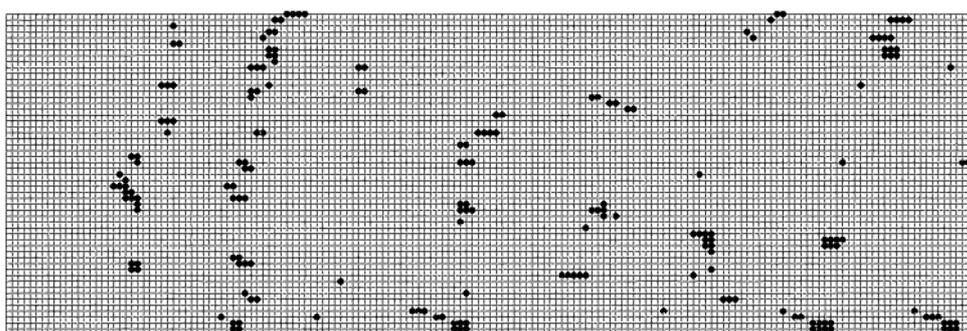
Анализ рисунков позволяет сделать вывод о том, что взаимного влияния соседних контактов не обнаруживается лишь при весьма малых номинальных давлениях. Так, уже при давлениях 8 МПа начинается объединение соседних пятен контактов от единичных неровностей (рис. 3.20 в). Плотность микроконтактов, не слишком велика, однако микроконтакты расположены таким образом, что их взаимное влияние имеет место. Можно также предположить, что до достижения этого уровня давлений контакт единичных микронеровностей достаточно достоверно описывается в рамках моделей контакта, основанных на решении Герца, что говорит о применимости ряда известных моделей для исследования слабонасыщенных контактов.



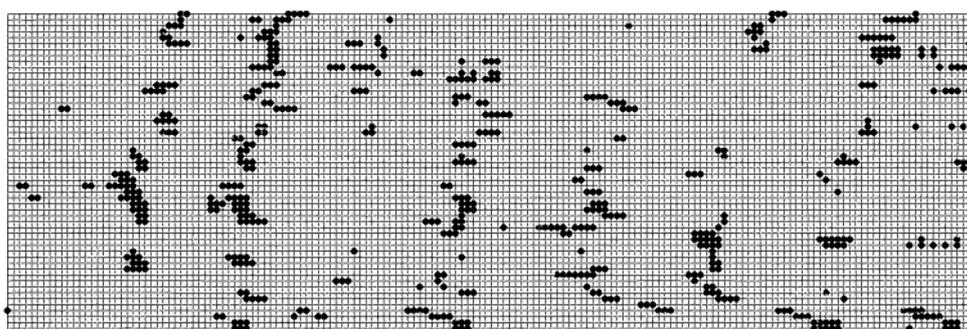
а)



б)



в)



г)

Рис. 3.20. Развитие областей контакта для поверхностей №1 и №3:

а - $p_n=0,099$ МПа, $A_R=0,446\%$, б - $p_n=1,231$ МПа, $A_R=0,413\%$,

в - $p_n=8,084$ МПа, $A_R=2,309\%$, г - $p_n=24,55$ МПа, $A_R=6,336\%$



а)



б)



в)

Рис. 3.21. Развитие областей контакта для поверхностей №1 и №3:

а - $p_n = 58,120$ МПа, $A_R = 14,840\%$, б - $p_n = 104,805$ МПа, $A_R = 26,040\%$,

в - $p_n = 163,705$ МПа, $A_R = 38,855\%$

На рис. 3.22-3.23 приведены эпюры контактных давлений для тех же этапов формирования пятен контакта, что и на рис. 3.20-3.21. Хорошо видны поперечные ряды неровностей, обусловленные движением инструмента при обработке поверхности детали, и волнистость. Интересно, что дефект в левой части поверхности, сопоставимый по высоте с шероховатостью, никак не влияет на распределение контактных давлений, не участвуя в контакте.

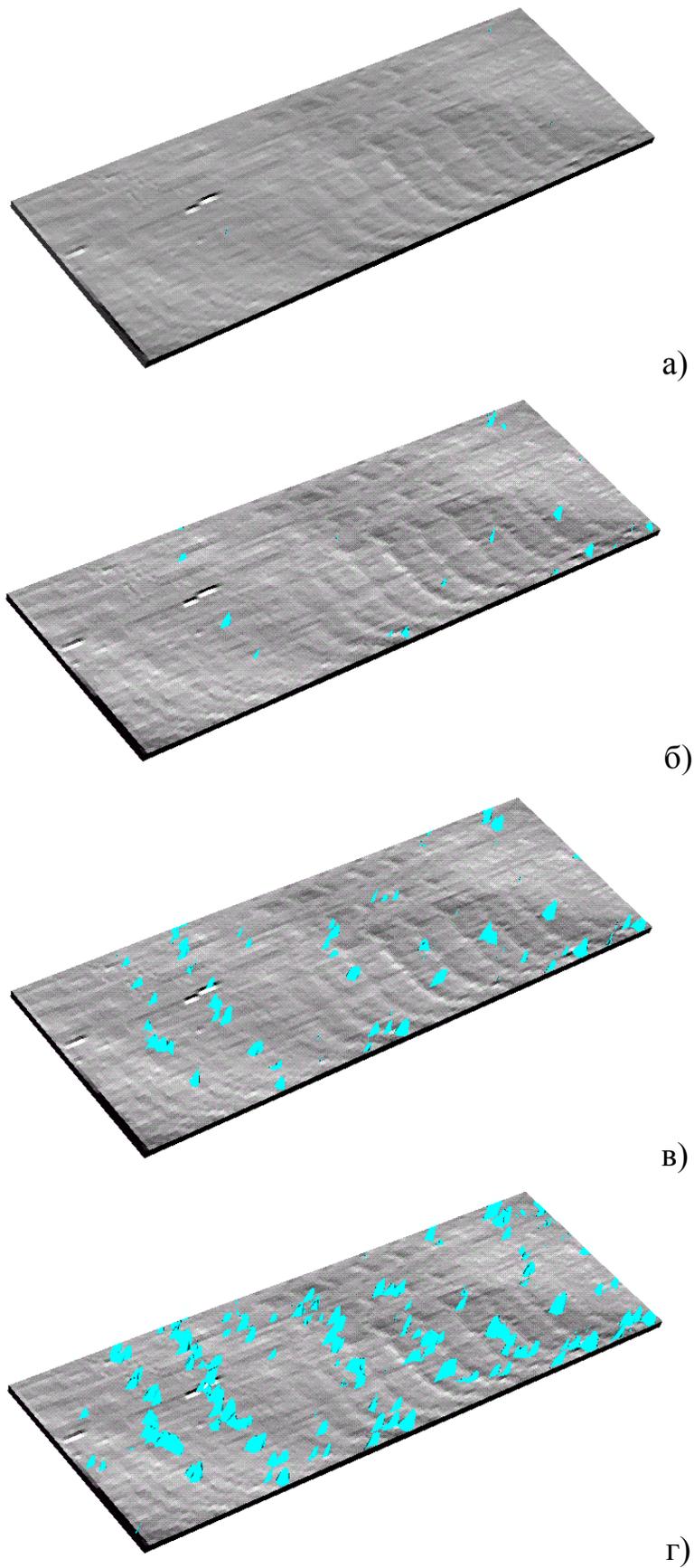
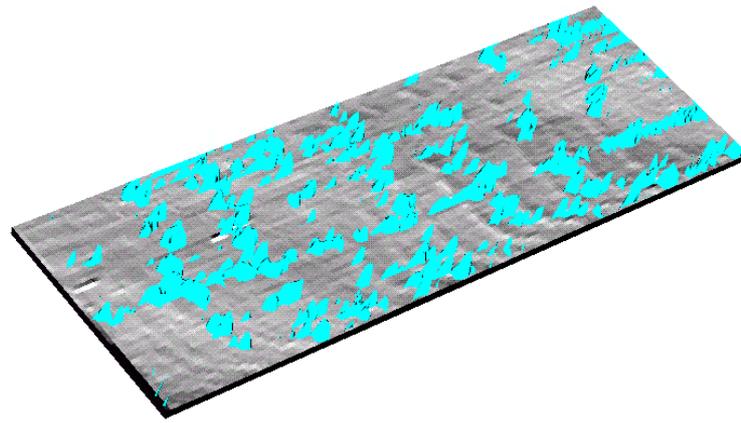
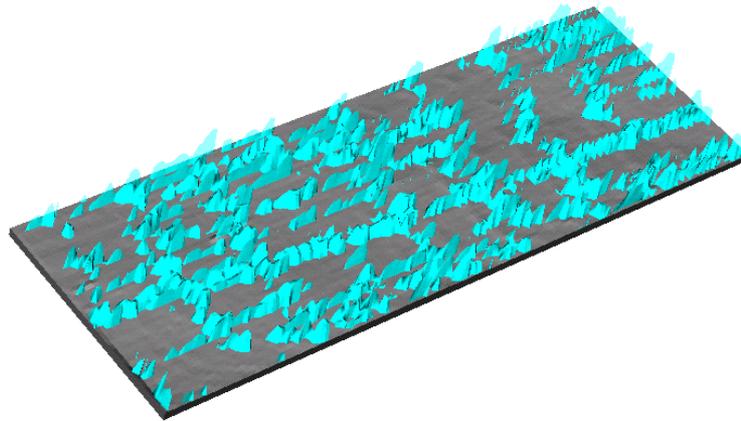


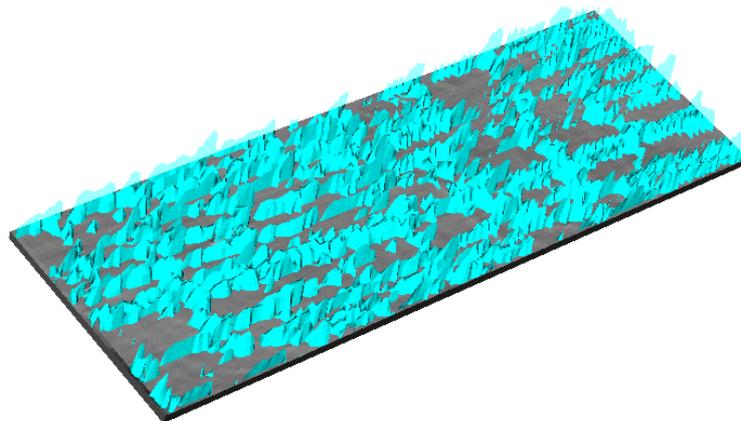
Рис. 3.22. Развитие областей контакта для поверхностей №1 и №3:
а - $p_n=0,099$ МПа, $A_R=0,446\%$, б - $p_n=1,231$ МПа, $A_R=0,413\%$,
в - $p_n=8,084$ МПа, $A_R=2,309\%$, г - $p_n=24,55$ МПа, $A_R=6,336\%$



а)



б)



в)

Рис. 3.23. Эпюры контактных давлений для поверхностей №1 и №3:

а - $p_n=58,120$ МПа, $A_R=14,840\%$, б - $p_n=104,805$ МПа, $A_R=26,040\%$,

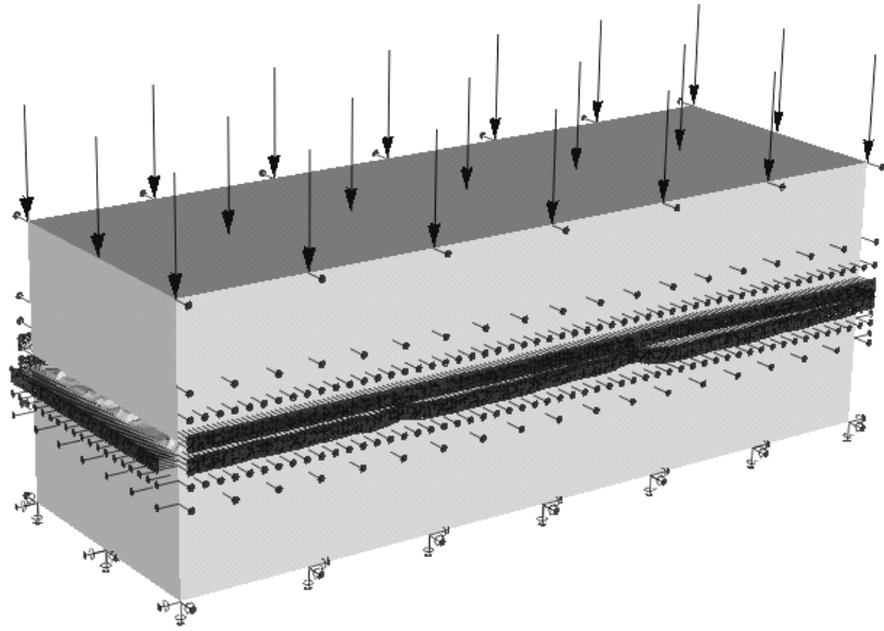
в - $p_n=163,705$ МПа, $A_R=38,855\%$

ГЛАВА 4. РЕШЕНИЕ ТАНГЕНЦИАЛЬНОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНТАКТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ

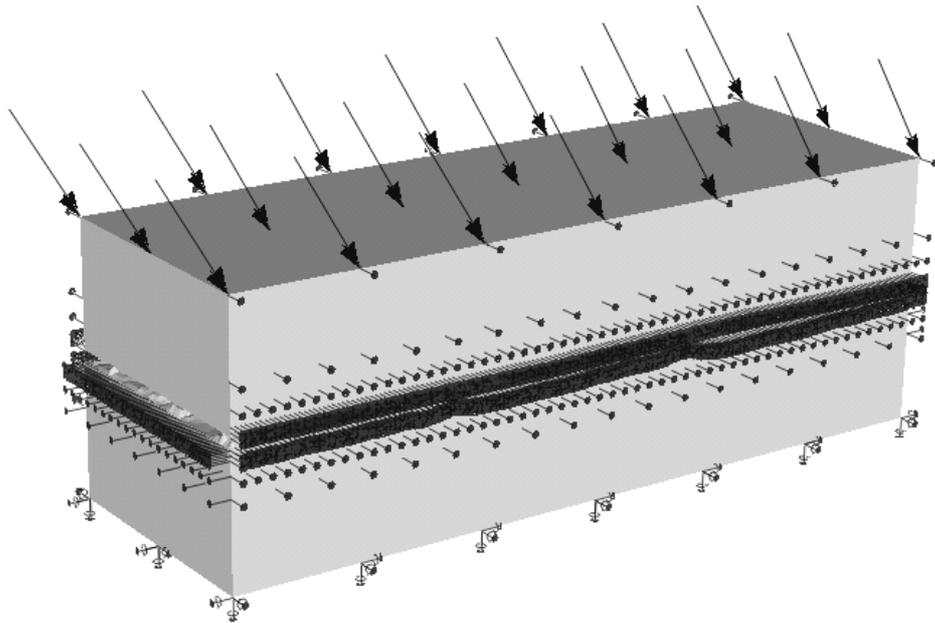
4.1. Краевые условия

При решении тангенциальной контактной задачи для базовых моделей использовалась та же конечноэлементная модель, что и при решении нормальной задачи, отличие состояло лишь в краевых условиях. Узлы нижней грани базовой модели закреплялись связями по всем степеням свободы, на остальные узлы внешних поверхностей модели накладывались связи, запрещающие горизонтальные перемещения в поперечном направлении, а на узлы нижней части модели также и связи, запрещающие перемещение в продольном направлении.

Нагружение производилось в две стадии. На первой стадии узлам верхней грани сообщалось вертикальное смещение, величина которого варьировалась таким образом, чтобы обеспечить номинальное давление в контакте в диапазоне 6...20 МПа. Величина смещения составляла от 1,25 до 3,5 мкм. Кроме того, узлам верхней части модели сообщалось горизонтальное смещение малой величины (0,00001 мкм), игравшее роль кинематической связи. Поскольку задача решалась в упругой постановке, эти смещения сообщались узлам модели за один шаг. На второй стадии узлам верхней поверхности базовой модели сообщалось горизонтальное смещение в продольном направлении. Величина этого смещения должна быть такой, чтобы при полной нагрузке на поверхности контакта возникало касательное усилие, практически соответствующее силе трения скольжения. В большинстве случаев такая ситуация реализовывалась при смещении около 1,5 мкм. Число шагов выбиралось с таким расчетом, чтобы обеспечить в дальнейшем построение достаточно гладких кривых, отражающих зависимость усилия в контакте от тангенциального вмящения верхней части модели. Обычно для этого достаточно 10-15 шагов. Схема базовой модели с краевыми условиями показана на рис. 4.1.



а)



б)

Рис. 4.1. Базовая модель с краевыми условиями для решения тангенциальной задачи:

а – только вертикальная нагрузка; б – вертикальная и горизонтальная нагрузка

4.2. Построение силовых характеристик шероховатого слоя при решении задачи в упругой постановке

Для расчетов были взяты те же поверхности, что и при решении нормальной задачи, за исключением поверхности, фигурировавшей в табл. 3.2 под номером 2. Основные параметры этих поверхностей, полученные как матема-

тические ожидания соответствующих величин по 5 трассам, приведены в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Параметры шероховатости поверхностей

Параметр, мкм	Номер поверхности		
	1	2	3
Ra	0,41	1,35	3,32
Rz	1,49	8,60	11,93
Rmax	2,85	10,50	18,48
Rp	1,49	4,83	10,13
Rv	-1,36	-5,67	-8,36
Rq	0,54	1,76	4,034
Sm	100,91	86,14	286,98
S	99,13	87,08	286,32

В ходе решения тангенциальной контактной задачи на каждом шаге нагружения оценивались следующие величины.

1. Номинальное давление в контакте, p_n , МПа.

$$p_n = \frac{P_C}{A}, \text{ где}$$

P_C - суммарное нормальное контактное усилие, равное сумме проекций узловых контактных усилий на вертикальную ось,

A - номинальная площадь поверхности контакта.

Номинальное давление вычислялось как среднее арифметическое этого параметра по шагам нагружения. Расчет производился для диапазона номинальных давлений, типичных для зоны внутреннего контакта дифференциального колеса.

2. Касательное усилие в направлении сдвига, q , МПа.

$$q = \frac{P_x}{A}, \text{ где}$$

- P_x - суммарное касательное усилие вдоль направления сдвига, равное сумме проекций узловых контактных усилий на продольную горизонтальную ось,
- A - номинальная площадь поверхности контакта.

3. Величина сдвига верхней части базовой модели в продольном направлении, α , мкм.

Было установлено, что упругая деформация всей модели при сдвиговой нагрузке очень мала по сравнению с податливостью, обусловленной наличием шероховатого слоя, и может вносить в решение ошибку, не превышающую 1,5% даже при больших смещениях.

Для упрощения дальнейшего использования полученных результатов в расчетах контактного взаимодействия для макрообъектов была сделана попытка аппроксимировать полученные силовые характеристики простыми аналитическими зависимостями. Оказалось, что для этой цели хорошо подходят выражения вида

$$\alpha(q) = c \cdot (F - q)^{-d} \cdot q, \text{ где}$$

α - тангенциальная податливость контактного слоя;

q - касательное усилие в контакте;

F - сила трения скольжения;

c, d - параметры.

Сила трения скольжения определялась как произведение суммарного нормального усилия в контакте, вычисленного в момент начала полного скольжения, на заложенный в расчет коэффициент трения, который был принят равным 0,28.

Графики зависимостей указанного вида аппроксимируют расчетные кривые с максимальной относительной погрешностью, не превышающей 4-5%, среднее значение ошибки составляет около 2,4%. Значения параметров c и d подобраны с использованием метода наименьших квадратов. Силовые характеристики, полученные для базовых моделей при различных номинальных нормальных давлениях, приведены на рис. 4.2-4.7. Расчетные значения показаны

пунктирными линиями, графики аппроксимирующих зависимостей – сплошными. Коэффициенты, использованные в аппроксимирующих зависимостях, приведены в табл. 4.2.

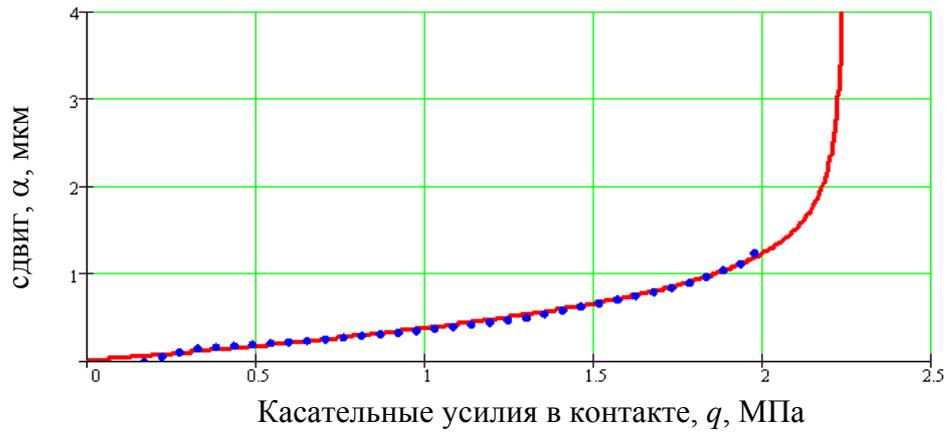


Рис. 4.2. Силовая характеристика шероховатого слоя для контакта поверхностей №1 и №2 при номинальном нормальном давлении в контакте 8,1 МПа

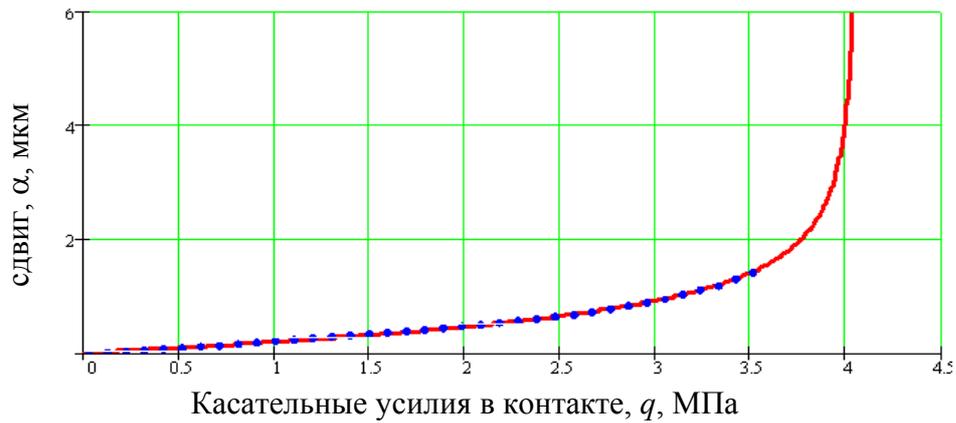


Рис. 4.3. Силовые характеристики шероховатого слоя для контакта поверхностей №1 и №2 при номинальном нормальном давлении 14,7 МПа

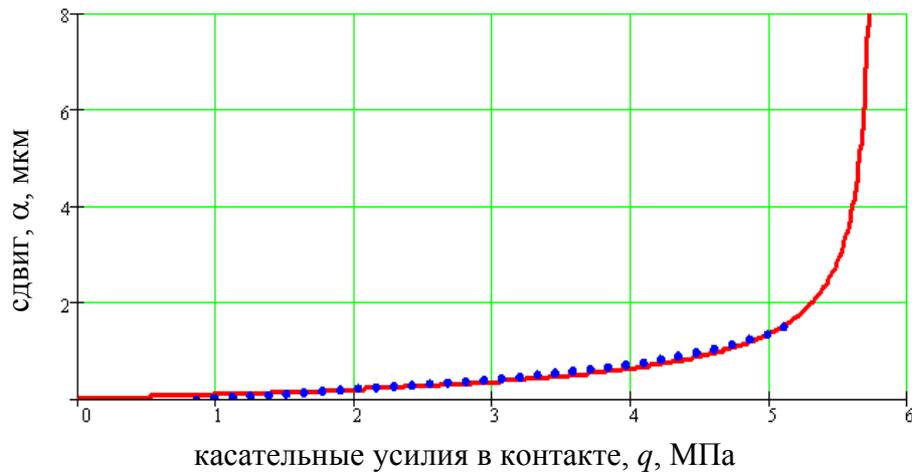


Рис. 4.4. Силовая характеристика шероховатого слоя для поверхностей №1 и №2 при номинальном давлении 20,6 МПа

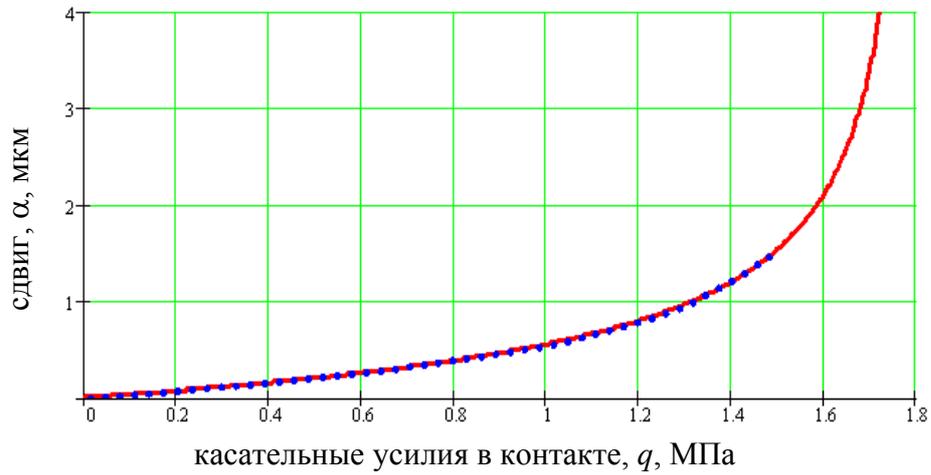


Рис. 4.5. Силовая характеристика шероховатого слоя для поверхностей №1 и №3 при номинальном давлении 6,4 МПа

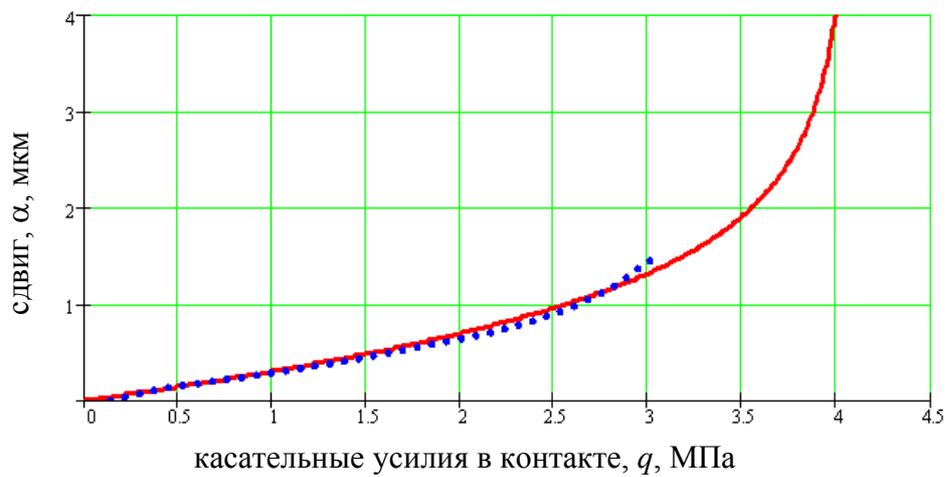


Рис. 4.6. Силовые характеристики шероховатого слоя для контакта поверхностей №1 и №3 при номинальном давлении 14,6 МПа

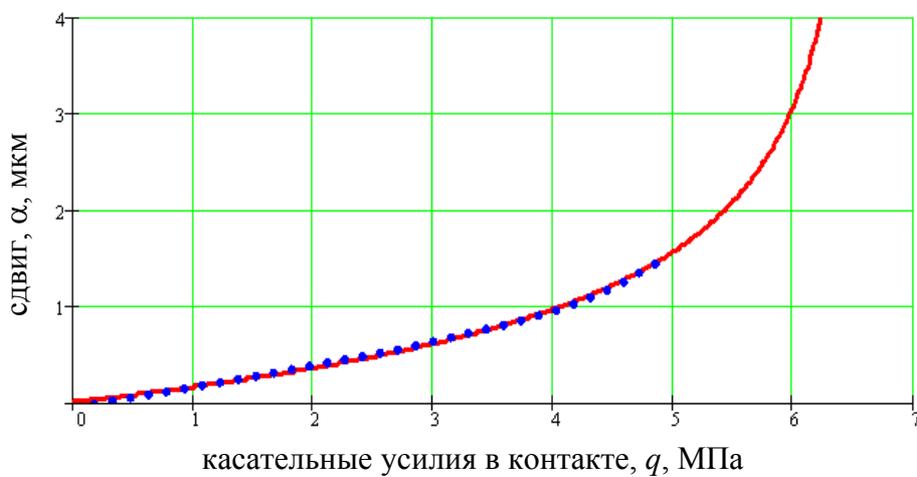


Рис. 4.7. Силовые характеристики шероховатого слоя для поверхностей №1 и №3 при номинальном давлении 23,8 МПа

Параметры аппроксимации силовых характеристик шероховатого слоя
для тангенциальной задачи

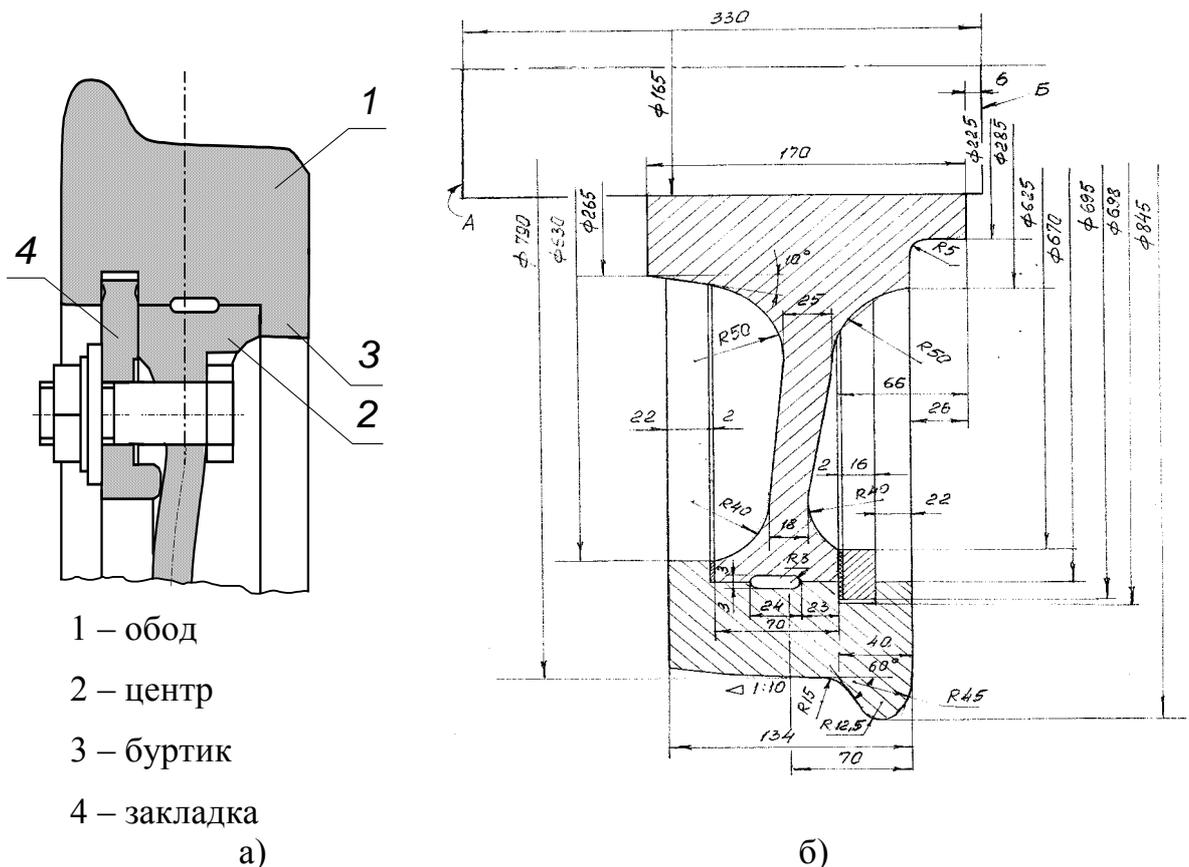
Поверхности, образующие контакт	Номинальное нормальное давление, МПа	$\alpha(q) = c \cdot (F - q)^{-d} \cdot q$	
		c	d
№1 и №2	8,1	0,399	0,303
	14,6	0,315	0,431
	20,7	0,229	0,658
№1 и №3	6,4	0,483	0,630
	14,6	0,467	0,631
	20,8	0,418	0,555

Полученные силовые характеристики могут быть применены к решению различных прикладных задач, однако в рамках данной работы такой цели не ставилось. Их практическое применение может быть связано, прежде всего, с решением контактной задачи качения для слабо нагруженного контакта при помощи приближенных методов. Повышенная податливость, обусловленная наличием шероховатого слоя, может существенно изменить распределения касательных напряжений при качении, величину крипа и т.д.

ГЛАВА 5. РЕШЕНИЕ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КОЛЕСА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ С УЧЕТОМ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ КОНТАКТА

5.1. Некоторые особенности конструкции колеса дифференциального вращения

В качестве объекта, на котором можно опробовать полученную методику решения контактной задачи, было выбрано колесо метро дифференциального вращения обода и центра, разработанное на Московском заводе по ремонту электроподвижного состава (ЗРЭПС). Исследованию параметров контакта в узлах трения этого объекта посвящена работа [24]. Схема колеса приведена на рис. 5.1.



- 1 – обод
- 2 – центр
- 3 – буртик
- 4 – закладка

Рис. 5.1. Дифференциальное колесо метро:

а – схема; б – чертеж

Особенность конструкции этого колеса состоит в том, что между колесным центром и ободом существует зазор. Величина этого зазора составляет

0,1...1,0 мм. Наличие зазора обеспечивает возможность отдельного вращения обода и колесного центра. В зависимости от величины зазора пятно контакта имеет различные размеры, достигая в длину десятков сантиметров при минимальных зазорах. Из проведенных ранее расчетов известно, что характерные давления в контакте между ободом и центром находятся в диапазоне 5...80 МПа, причем наблюдаются острые пики контактных давлений на границах области контакта [24]. Представляет практический интерес выяснение степени влияния шероховатости поверхностей обода и центра на параметры контакта, поскольку в указанном диапазоне давлений шероховатость поверхностей может вносить существенную поправку в решение. На рис. 5.2 приведена расчетная схема дифференциального колеса, построенная средствами программного комплекса DSMFem. В силу симметрии оказалось возможным проводить решение для половины колеса. Величина нагрузки, действующей на ось колеса, составляет 75 кН.

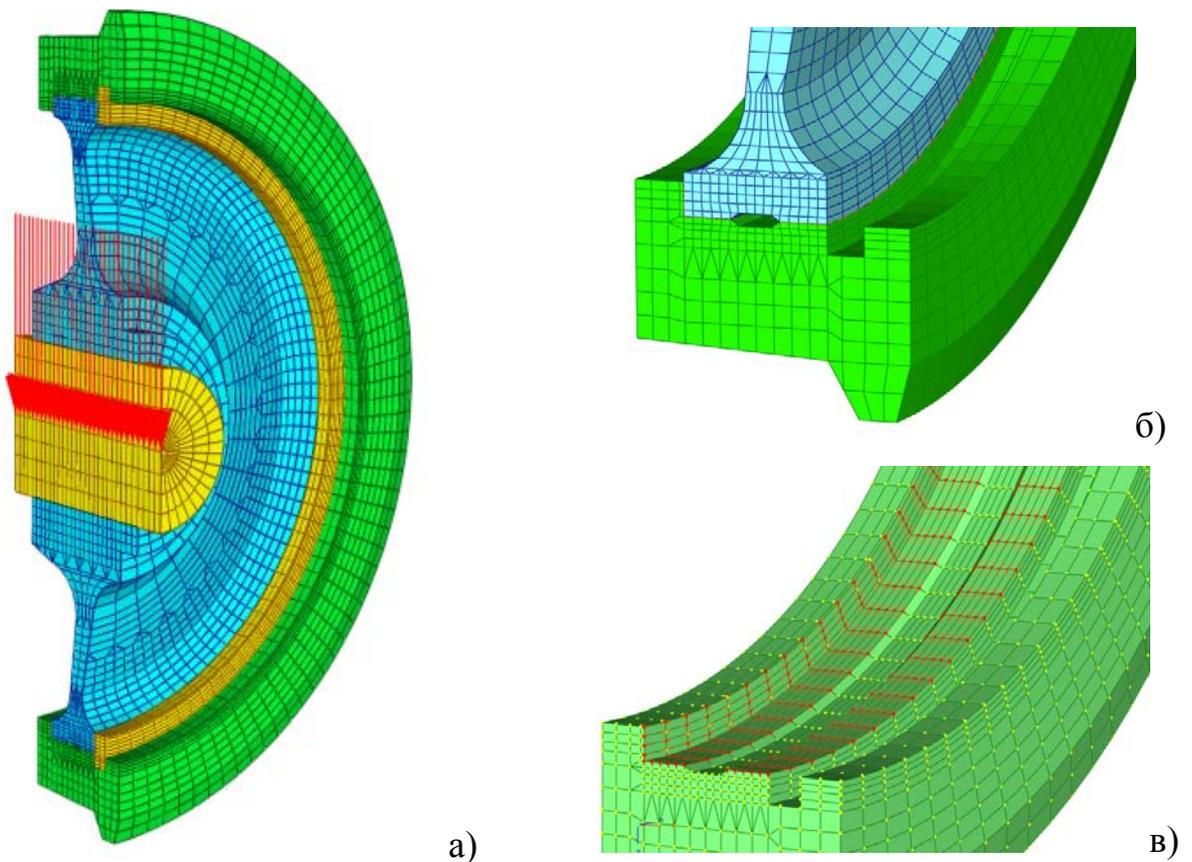


Рис. 5.2. Конечноэлементная модель колеса дифференциального вращения:
а – общий вид и нагрузка; б – фрагмент; в – фрагмент зоны контакта

Область возможного контакта колесного центра и обода распространяется на всю длину внутренней поверхности обода. Действие отброшенной половины колеса заменено связями. При решении с учетом шероховатости поверхностей учитывался контакт между ободом и центром, закладка заменена связями, препятствующими перемещению колеса в направлении вдоль оси. Кроме того, наложена связь на все степени свободы в точке контакта обода колеса с рельсом. На рис. 5.3 показаны связи, наложенные на колесо.

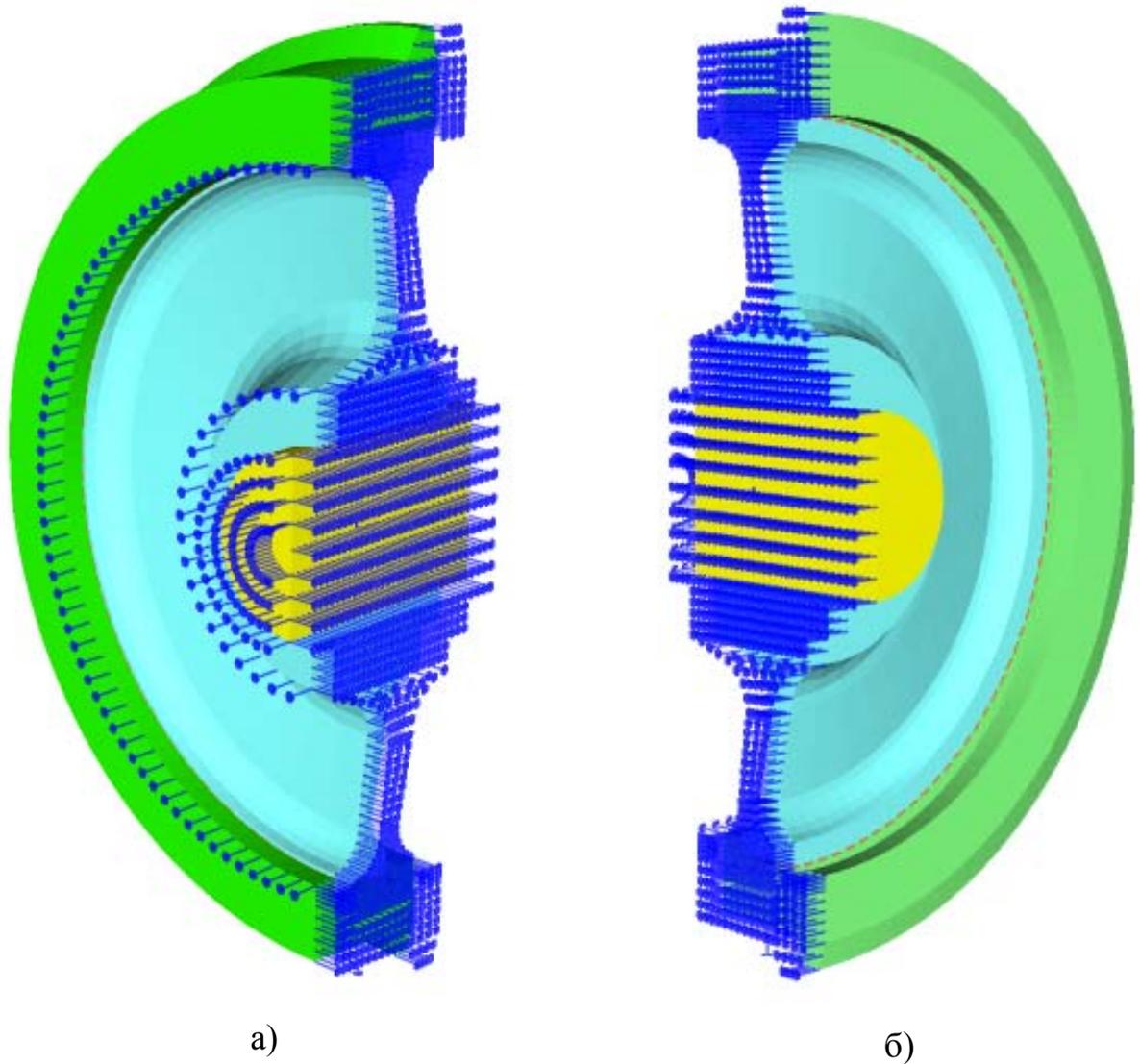


Рис. 5.3. Связи, наложенные на колесо:

а – вид слева, б – вид справа

Конечноэлементная модель содержит 26316 элементов и 32597 узлов, количество степеней свободы составляет 83748.

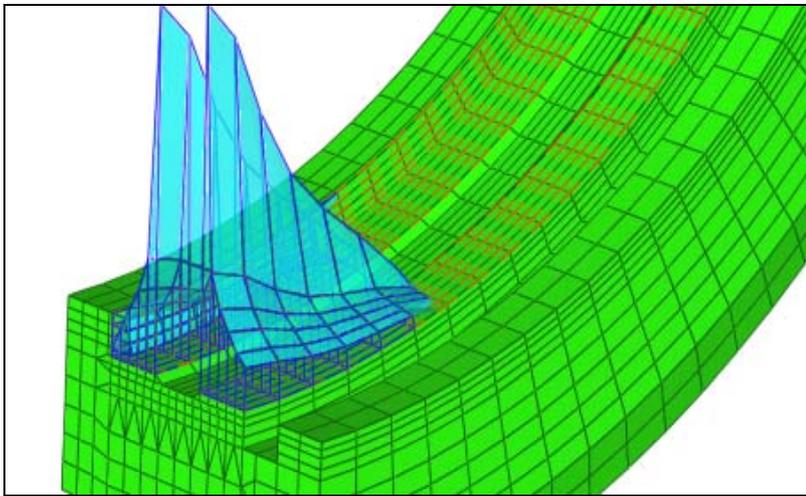
5.2. Решение нормальной контактной задачи для зоны внутреннего контакта

Ранее были проведены некоторые расчеты с учетом податливости шероховатого слоя. Податливость контактного слоя учитывалась увеличением зазора в контакте. При этом для исходной модели колеса решалась контактная задача и определялись давления в каждом контактном элементе. По величинам этих давлений определялся дополнительный зазор в соответствии с зависимостью сближение-давление, полученной для базовой модели при решении плоской задачи. Решение сводилось к итерационной процедуре, которая за 6-7 шагов сходилась к некоторому равновесному решению.

В данной работе использовался другой прием. Степенные выражения, аппроксимирующие сближения от номинального давления в контакте, которые были получены в гл. 3, вводятся в расчет при решении контактной задачи для зоны внутреннего контакта обода колеса с колесным центром. При запуске программы решения контактной задачи коэффициенты, задающие кривую, указываются в качестве параметров. На каждом шаге итерационной процедуры релаксационного метода анализируется вход в контакт пары узлов и оценивается величина внедрения активного узла внутрь пассивного тела. По силовой характеристике шероховатого слоя находится величина давления, соответствующая этому внедрению, и по ней подбирается сила в контакте. Распределение усилий в контакте меняется до того момента, пока не будет достигнуто равновесие между приложенной нагрузкой и усилиями в контакте. Величина контактных давлений при этом постоянно уточняется. Учет дополнительной податливости контакта, таким образом, является более универсальным и не требует дополнительных процедур.

Введение в расчет параметров шероховатости представляет собой сообщение некоторых жесткостных параметров контактными конечными элементами, при помощи которых моделируется контактный слой. В обычном режиме решения контактные элементы являются логическими и, формально, обладают

бесконечной жесткостью, лишь позволяя контролировать выполнение условия взаимного непроникновения поверхностей контактирующих тел. При учете шероховатости поверхностей жесткость контактного элемента конечна и соответствует силовой характеристике, полученной на базовых моделях. Контакт становится более податливым по сравнению с решением без учета шероховатости. Это приводит к существенному снижению контактных давлений и увеличению площади области контакта обода с колесным центром. На рис. 5.4-5.5 приведены эпюры контактных давлений, вычисленных без учета и с учетом шероховатости поверхностей для колеса с зазором между ободом и центром, равным 0,1 мм.

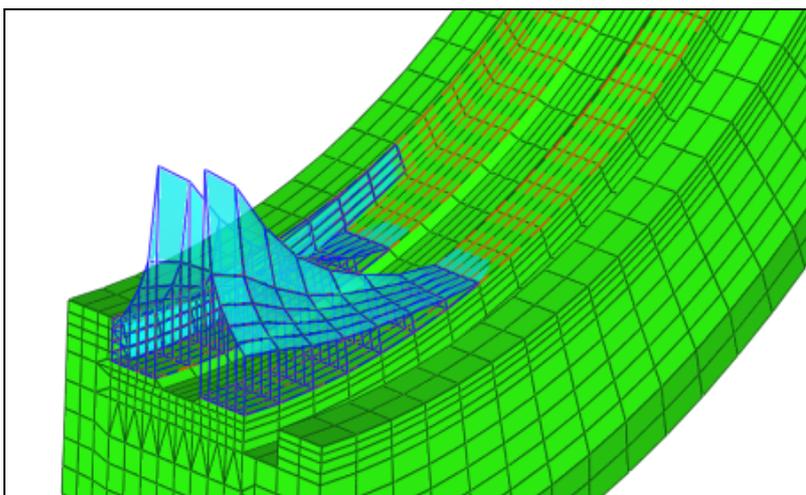


а)

Максимальные давления
в контакте

$$p_{\max} = 54,03 \text{ МПа}$$

Площадь области кон-
такта $A_c = 47,63 \text{ см}^2$



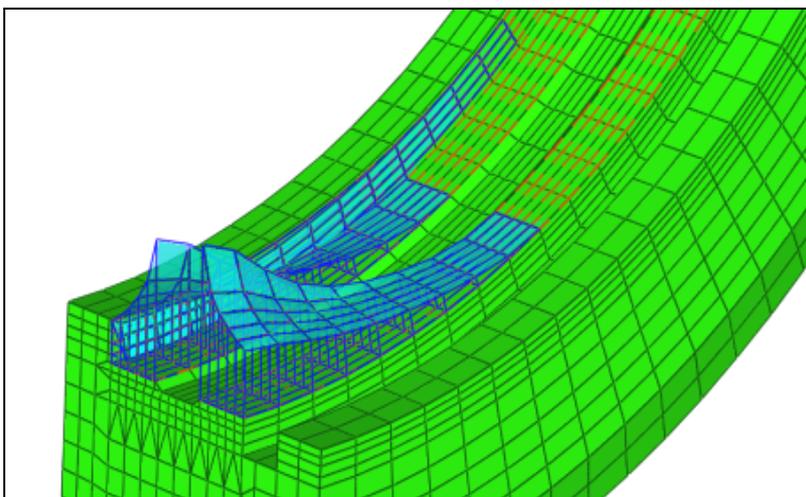
б)

Максимальные давления
в контакте

$$p_{\max} = 31,91 \text{ МПа}$$

Площадь области кон-
такта $A_c = 77,41 \text{ см}^2$

Рис. 5.4. Эпюры нормальных контактных давлений в контакте обод-центр:
а – без учета шероховатости; б – с учетом шероховатости, поверхности №1 и
№3 (табл. 3.2)

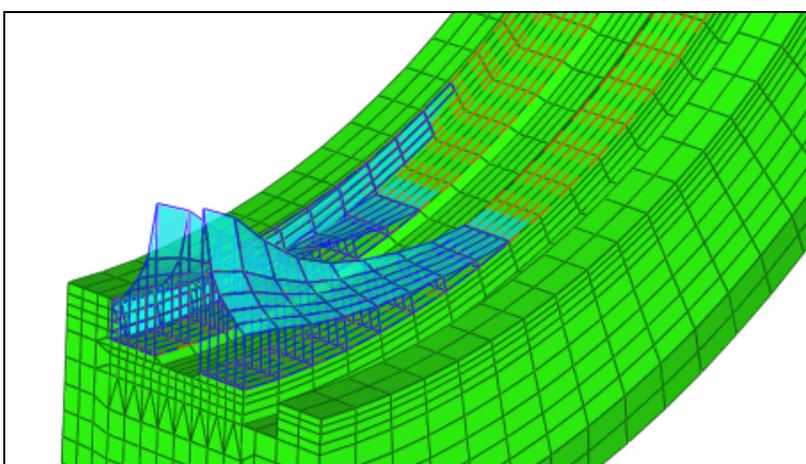


а)

Максимальные давления
в контакте

$$p_{\max} = 21,69 \text{ МПа}$$

Площадь области кон-
такта $A_c = 96,77 \text{ см}^2$



б)

Максимальные давления
в контакте

$$p_{\max} = 24,79 \text{ МПа}$$

Площадь области кон-
такта $A_c = 87,09 \text{ см}^2$

Рис. 5.5. Эпюры нормальных контактных давлений в контакте обод-центр с учетом шероховатости:

а – поверхности №3 (табл. 3.2); б – поверхности №3 и №4 (табл. 3.2)

ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

В ходе выполненных исследований были получены следующие основные результаты.

1. Разработана универсальная методика решения контактных задач для макротел произвольной формы с учетом шероховатости их поверхностей.
2. Разработаны методика и процедура автоматизированного получения топологии шероховатых поверхностей с использованием измерительной системы на базе профилографа-профилометра и ЭВМ.
3. Разработана процедура автоматизированного построения конечно-элементных моделей по данным профилометрии с возможностью сгущения конечноэлементной сетки вблизи поверхности контакта.
4. Модифицированы алгоритмы и программы комплекса DSMFem для решения упруго-пластических контактных задач.
5. Получены силовые характеристики шероховатого слоя и их аппроксимации при нагружении стыка нормальными и тангенциальными силами для различных пар поверхностей. При решении использованы базовые модели, грани которых имеют топологию реальных шероховатых поверхностей.
6. Исследованы зависимости фактической площади контакта и распределения контактных давлений на неровностях от номинальных давлений на поверхности базовых моделей при упругом и упруго-пластическом деформировании материала.
7. Выполнено исследование влияния шероховатости поверхностей на распределение контактных давлений в колесе колесной пары дифференциального вращения. Учет шероховатости ведет к уменьшению расчетных значений максимальных давлений на 41...60% и увеличению площади области фактического контакта на 62...103% в зависимости от параметров шероховатости. Следовательно, не-

смотря на то, что значения перемещений, обусловленные податливостью шероховатого слоя, невелики по сравнению с характерными размерами макрообъекта, для некоторых контактных задач они могут оказывать существенное влияние на распределение контактных давлений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Boussinesq J. Application des Potentiels a l'Etude de l'Equilibre et du Mouvement des Solides Elastiques. – Paris, Gauthier-Villars, 1885. – P. 92.
2. Bush A.W., Gibson R.D., Keogh G.P. // *Wear*. 1975. Vol. 35, N1. P. 399-403.
3. Bush A.W., Gibson R.D., Keogh G.P. // *Mesh Res. Comm.* 1976. Vol. 3, N3. P. 169-174.
4. Dobitschin M.N., Gorjatscheva I.G., Litvinov V.N., Mihin N.M. Mutual influence of microcontacts on stress in contact area. – *Trans Eurotrib-81*. Warszawa, 1981, vol. 1, p. 70-84.
5. Fromm H. Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbaren Scheiben.- *ZAMM*, 1927, 7.
6. Greenwood J.A. The area of contact between rough surfaces and flats. – *ASME*, 1967, Ser. E, N 1.
7. Greenwood J.A., Johnson K.L., Matsubara E. // *Wear*. 1983. Vol. 100, N1. P. 47-57.
8. Greenwood J.A., Tripp J.H. The elastic contact of rough spheres // *Journal of applied mechanics*. March 1967, p.p. 153-159.
9. Greenwood J.A., Williamson J.B. P. // *Proc Roy. Soc.* 1966. Vol. A295. P. 300-319.
10. Hertz H. *Gesammelte Werke*. Bd.1, 1985, Leipzig, ss. 155-196.
11. Hertz H. *Miscellaneous Papers*. McMillan, London, 1896.
12. Hughes B.D., White L.R. Analytic Approximation for the Elastic Contact of Rough Spheres-*Transactions of the ASME*. – *J. of Appl. Mech.*, 1980, vol. 47, N3, p. 194-196.
13. Johnson K.L., Kendall K., Roberts A.D. // *Proc. Roy. Soc.* 1971. V. A394. P. 301-313.
14. Kagami J., Yamada K., Hatazawa T. Contact between a Sphere and Rough Plates. – *Wear*, 1983, vol. 87, N1, p. 93-105.

15. Kalker J.J., Dekking F.M., and Vollebregt E.A.H. Simulation of rough, elastic contacts., 1996,
16. Knothe K., Theiler A. Normal and tangential contact problem with rough surfaces. Proceedings of the 2nd mini conference on contact mechanics and wear of rail/way systems, Budapest, 29-31 July, 1996, p.p.34-43.
17. Lincoln B. Elastic deformation and the Laws of Friction. Nature, vol. 172, 1953, p.69.
18. Mindlin R.D., Compliance of Elastic Bodies in Contact. – J. Appl. Mech., 1949, vol. 16, N3, p. 259-268.
19. Nayak P.R. // Wear. 1973. Vol. 26. P. 305 - 333.
20. O’Callagan M., Cameron M.A. // Wear. 1976. Vol. 36. P. 79-97.
21. Pullen J., Williamson J.B.P. 11 Proc. Roy. Soc. London. 1972. Vol. A327. P. 159 - 173.
22. Sakalo V., Olshevsky A., Shevchenko K. RSFEM Program Package for Contact Units Investigation/Consideration of Railway Transport Problems. Proceedings of the 4th International Conference on Railway Bogies and Running Gears, Budapest, Hungary, 1998, pp. 162-164
23. Sakalo V.I. An iterative method for solution of contact problems // Book of Abstracts, The Third Int. Congress ICIAM 95, Hamburg, 1995, p. 424.
24. Sakalo V.I., Vinnik L.V., Fridberg A.M., Olshevsky A.A., Shevchenko K.V. Wheelset with differential rotation of the wheels for decreasing wheel and rail wear. Proceedings of the 14th International Conference “Current problems in rail vehicles- PRORAIL “99”, October 6-8, 1999, Zilina (Slovakia), c. 43-44
25. Uppal A.H., Probert S.D. // Wear. 1973. Vol. 23, N2. P. 173-184.
26. Uppal A.H., Probert S.D. Deformation of single and multiple asperities of metal surfaces. – Wear, 1972, vol. 20, N 3, p. 381-400.
27. Varadi K. and Néder Z. Three dimensional algorithm for contact analysis of real rough surfaces. manuscript, 1996.

28. Wang Q. and Knothe K. Theorie und numerische Behandlung des allgemeinen rollenden Kontaktes zweier viskoelastischer Walzen. VDI Fortschrittberichte, 1: Konstruktionstechnik / Maschinenelemente (165), 1988.
29. Wen-Hwa Chen, Jyi-Tyan Yen. Finite element analysis of finite deformation contact problems with friction // Computers & Structures. – 1988. – Vol. 29, No. 3 – pp. 423 – 436
30. Wyant J.C., Koliopoulos C.L., Bhushan B., George O.E. // ASLE Transactions. 1984. Vol. 27,N2.P. 101-113.
31. Xinli Bai, Xinghua Zhao. Analysis of large deformation elastoplastic contact through finite gap elements // Computers & Structures. – 1988. – Vol. 30, No. 4 – pp. 975 – 978.
32. Yamada Y., Yoshimura N., Sakurai T. Plastic stress-strain matrix and its application for the solution of elastic-plastic problems by the finite element method. // International Journal of Mechanical Sciences, 1968, v.10, N5, p. 343-354.
33. Zhong Wanxie, Sun Suming. A finite element method for elasto-plastic structures and contact problems by parametric quadratic programming // International journal for numerical methods in engineering – 1988 – Vol. 26 – pp. 2723 – 2738.
34. Айнбиндер С.Б. // Механика полимеров. 1977. № 2. С. 241-246.
35. Айнбиндер С.Б., Логинова А.Я. // Механика полимеров. 1976, № 5. С. 831 – 837.
36. Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л. // Механика полимеров. 1977. № 2. С. 241 – 246.
37. Айнбиндер С.Б., Тюнина Э.Л. Введение в теорию трения полимеров. Рига, 1978.
38. Алисин В.В., Комбалов В.С. Учет волнистости при расчете площадей из касания. – В кн.: Надежность и контроль качества. М., Изд-во стандартов, №8,1975, с. 38-48.

39. Безухов Н. И. Теория упругости и пластичности. – М.: Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1953 – сс. 420.
40. Беляев Н.М. Применение теории Герца к подсчетам местных напряжений в точке соприкосновения колеса и рельса. // Вестник инженеров. – 1917. – т. III. - №12. - С. 281-282.
41. Беляев Н.М. Труды по теории упругости и пластичности. – М.:Техн.-теор. Лит. - 1957. – 632 с.
42. Бхушан Б. // Пробл. Трения и смазки. 1984. Т. 106,№1.С 31-40.
43. Галин Л.А. Контактные задачи теории упругости. – М.: Гостехиздат, 1953.
44. Горячева И.Г. Механика фрикционного взаимодействия. – М., Наука, 2001 г. – 478 с.
45. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Контактные задачи в трибологии. – М.: Машиностроение, 1988. 256 с.
46. Горячева И.Г., Добычин М.Н. Механизм формирования шероховатости в процессе приработки // Трение и износ, 1982, том III, №4.
47. Гринвуд Д.А.,Трипп Д.Х. // Прикладная механика. 1967 Т. 34, №4. С. 7-13.
48. Демкин Н.Б. // Вопр. механики. Калинин, 1972. Вып. 15(13) С. 167 –173.
49. Демкин Н.Б. Контактное взаимодействие шероховатых поверхностей. М., 1970.
50. Демкин Н.Б., Измайлов В.В.// Поверхность. 1982. № 11. С. 16 –27.
51. Демкин Н.Б., Коротков М. А., Алексеев В. М. // Расчет и моделирование режима работы тормозных и фрикционных устройств. М., 1974. С. 5 –15.
52. Демкин Н.Б., Коротков М.А., Бойченко В. И., Дзекцер Н. Н. // Электричество. 1971. № 8. С. 77 –79.
53. Демкин Н.Б., Рыжов Э.В. Качество поверхности и контакт деталей машин. – М.: Машиностроение, 1981.– 244 с.
54. Дерягин Б.В., Муллер В.М., Топоров Ю.П. // Коллоид. журн. 1975. Т. 37 №6. С. 1066-1074.
55. Джонсон К.Л. Механика контактного взаимодействия – М.: “Мир”. – 1989, с. 503

56. Динник А.Н. Удар и сжатие упругих тел. // Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1909, кн. 4
57. Добычин М.Н., Литвинов В.Н., Михин Н.М. 777 Несущая способность микроконтактов при высокой плотности пятен касания. – В кн.: Жесткость машиностроительных конструкций. Брянск, 1976, с. 66-70.
58. Журавлев В.А. // ЖТФ. 1940. Т. 10, вып. 17.
59. Жесткость в машиностроении. Тезисы докладов к всесоюзной научно-технической конференции 21-23 сентября 1971 г. Брянск, 1971.
60. Зенкевич Дж. Метод конечных элементов в технике – М.: Мир, 1975. -541 с.
61. Илсумс М.М., Рудзит Я.А., Исследования упругого контакта шероховатой сферы с плоскостью. – В кн.: Микрогеометрия и эксплуатационные свойства деталей машин. Рига: Зинатне, 1974, вып. 3, с. 137-150.
62. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. – М., 1969 г., 420 стр. с илл.
63. Ковальский Б.С. Напряжения на участке местного сжатия при учете сил трения. // Известия АН СССР, 1942.
64. Комбалов В.С. Влияние шероховатостей твердых тел на трение и износ. М., «Наука», 1974.
65. Крагельский И.В. // Изв. АН СССР. Отд. техн. Наук. 1948. №10. С.1621-1625.
66. Крагельский И.В. // Трение и износ. М., 1962.
67. Крагельский И.В. Влияние различных параметров на величину коэффициента трения несмазанных поверхностей. // Журнал технической физики, 1943. Вып. 3, т. XIII. С.141-151.
68. Крагельский И.В. Износ как результат повторной деформации поверхностных слоев // Известия вузов. Физика. 1956 № 5. С. 119-127
69. Крагельский И.В., Комбалов В.С., Логинов А.Р., Сачек Б.Я. О единстве критериев изнашивания // Расчетно-экспериментальные методы оценки трения и износа. М.: Наука, 1980. С. 13-16.

70. Крагельский И.В., Добычин М.Н., Комбалов В.С. Основы расчета на трение и износ.
71. Крагельский И.В., Харач Г.М. О расчете износа поверхностей трения // Расчетные методы оценки трения и износа. Брянск: Изд-во Брянского ин-та трансп. Машиностроения, 1975. С. 5-47
72. Лемберский В.Б., Шайняк И.Р. О взаимном влиянии микронеровностей при контактировании. // Трение и износ, 1981. Т. IV, №2.
73. Максак В.И., Советченко Б.Ф., Чернышева Т.В. Исследование пластического контактирования шероховатых тел. // Трение и износ, 1984. Т. V, №4. С. 605-610.
74. Михин А.Н., Онищенко Л.Н. Зависимость фактической площади касания от сближения между шероховатыми поверхностями. // Трение и износ, 1988. Т. 9, №6.
75. Михин Н.М. О предельных сближениях между поверхностями контактирующих твердых тел. // Трение и износ, 1985. Т. VI, №3.
76. Михин Н.М., Добычин М.Н. Зависимость площади касания от сближения в приработанном состоянии. – Изв. вузов. Машиностроение, 1969, №4, с. 38-43.
77. Муллер В.М., Ющенко В.С. // Коллоид. журн. 1980 Т. 42, №2. С. 500-510.
78. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред, М.: Мир, 1976., 464 с.
79. Ольшевский А.А. Разработка методики решения контактных задач с учетом шероховатости поверхностей. // Молодежн. науч.-техн. конф. техн. вузов центр.России / Тез. докл. Под ред. О.А. Горленко. – Брянск, БГТУ, 2000. – С.63-67.
80. Ольшевский А.А., Винник, Л.В., Фридберг А.М. Решение нормальной контактной задачи для шероховатых номинально плоских поверхностей // Динамика и прочность транспортных машин: Сб. науч. тр., - Брянск, 2000. – С 102-108.

81. Ольшевский А.А., Винник, Л.В., Фридберг А.М., Сакало В.И. Ольшевский А.А. Решение нормальной контактной задачи для дифференциального колеса с учетом шероховатости поверхностей контакта // Динамика, прочность и надежность транспортных машин: Сб. науч. тр., - Брянск, 2002. – С 109-118.
82. Ольшевский А.А. Решение контактных задач с учетом шероховатости поверхностей контакта методом конечных элементов с использованием трехмерных расчетных схем // Динамика, прочность и надежность транспортных машин: Сб. науч. тр., - Брянск, 2002. – С 149-154.
83. Отнес Р., Эноксон Л. Прикладной анализ временных рядов. Основные методы: - М.: Мир, 1982.
84. Подлеснов Ю.П. Применение МКЭ к решению плоских прикладных контактных задач. Дис. ...канд. техн. наук.-Коломна, 1980.-141с.
85. Развитие теории контактных задач в СССР. – М.: Наука. – 1976. – 492 с.
86. Рудзит Я.А. Исследование нерегулярной шероховатости и процесса контактного взаимодействия поверхностей. Автореф. дисс. ... д-ра техн. наук. Л., 1981.
87. Рудзит Я.А. Микрогеометрия и контактное взаимодействие поверхностей. Рига, 1975.
88. Рыжов Э.В. Контактная жесткость деталей машин. – М., Машиностроение, 1966 г.
89. Рыжов Э.В. Технологические методы повышения износостойкости деталей машин. – Киев: Наук. думка, 1984.– 272 с.
90. Рыжов Э.В. Основы расчета стыковых поверхностей деталей машин на контактную жесткость. - М., Машгиз, 1962.
91. Рыжов Э.В., Сакало В.И., Подлеснов Ю.П. Решение контактных задач релаксационным методом конечных элементов // Машиноведение.-1980.- №6.- С. 64-69.

92. Сакало В.И., Рыжов Э.В., Подлеснов Ю.П. Решение контактных задач релаксационным методом конечных элементов // *Машиноведение*, №6, 1980, с.64-69
93. Сакало В.И., Рыжов Э.В., Подлеснов Ю.П. Решение плоских контактных задач с учётом трения релаксационным методом конечных элементов // *Механика и физика контактного взаимодействия*, Калинин, 1979, с. 3-14.
94. Сакало В.И., Подлеснов Ю.П. Определение давлений в случае плотного контакта некруговых цилиндров // *Вопросы исследования надёжности и динамики элементов транспортных машин и подвижного состава*, Тула, 1978, с.139-143.
95. Саусвелл Р.В. Введение в теорию упругости. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 674 с.
96. Свириденко А.И., Корочкина Т.В., Петроковец М.И., Чижик С.А. О фактической площади контакта шероховатых сфер. // *Трение и износ*, 1985, Т. VI, №3.
97. Свириденко А.И., Чижик С.А., Петроковец М.И. Механика дискретного фрикционного контакта. – Минск: «Наука і Тэхніка», 1990, 272 с.
98. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. – М.: Мир, 1979
99. Серенсен С.В., Когаев В.П., Шнейдерович Р.М. Несущая способность и расчеты деталей машин на прочность. М.: Машиностроение, 1975.,488 с.
100. Соколовский В.В. Теория пластичности. М. «Высшая школа», 1969. – 608с. с илл.
101. Суслов А.Г. Технологическое обеспечение контактной жесткости соединений. М., «Наука», 1977.
102. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости.– М.: «Наука», 1975, 575 с.
103. Тихомиров В.П., Горленко О.А. Решение контактных задач методами имитационного моделирования процессов взаимодействия сопрягаемых деталей машин с шероховатыми поверхностями. // *Трение и износ*, 1996, Т. 17, №1.

104. Трехмерные задачи математической теории упругости. / Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О., Бурчуладзе Т.В. – Т.: Изд-во Тбилисского ун-та, 1968.
105. Тюнина Э.Л. Расчет площади фактического контакта и силы трения металлополимерных пар. Дис. ... канд. техн. наук. Рига, 1978.
106. Файнбурд В.М. Контактные задачи теории упругости (решение и моделирование на основании электростатической аналогии). - М.: «Наука», 1975.
107. Чекина О.Г. Анализ контактирования шероховатых поверхностей на основе рассмотрения полного контакта. // Трение и износ Т. 16, №2.С. 205-212.
108. Чижик С.А. О критерии шероховатости при оценке характеристик герцевского контакта. // Трение и износ, 1987, Т. 8, №4. С. 724-728.
109. Чижик С.А., Горбунов В.В., Мышкин Н.К. Компьютерное моделирование зоны контакта твердых тел на основе данных сканирующей зондовой микроскопии. // Трение и износ, 1993. Т. 14, №4. С. 634-644.
110. Шевченко К.В. Математическое моделирование напряженно-деформированного состояния железнодорожных колес для оценки их работоспособности. Дис. ... канд. техн. наук. Брянск, 2002.
111. Штаерман И.Я. Контактная задача теории упругости. Гостехтеоретиздат, 1949, с. 258

ПРИЛОЖЕНИЯ

П1 Результаты решения контактной задачи в упругой постановке с использованием базовых моделей

В табл. 1.1-1.9 приведены результаты решения упругой контактной задачи для базовых моделей. На рис. П1.1-П1.16 приведены графики зависимости фактической площади контакта от номинального давления в контакте, а также графики зависимости сближения тел, обусловленного шероховатостью поверхностей, от номинального давления (силовые характеристики шероховатого слоя). На рис. П1.17-П1.18 графики, построенные по результатам решения задачи для поверхностей с различными параметрами, построены на одном поле для облегчения их сравнения. Номера поверхностей в таблицах и на рисунках соответствуют табл. 3.2 из основной части диссертации.

Таблица 1.1

Результаты решения для моделей с поверхностями №1 и №2

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,250	0,249	24,5	0,112	0,100
2	0,500	0,449	107,9	0,493	0,257
3	0,750	0,745	330,0	1,509	0,825
4	1,000	0,995	682,0	3,118	1,115
5	1,250	1,242	1136,0	5,194	1,562
6	1,500	1,488	1742,0	7,965	2,142
7	1,750	1,733	2518,0	11,513	2,878
8	2,000	1,976	3526,0	16,123	3,926
9	2,429	2,386	6236,0	28,514	6,615
10	2,857	2,788	10100,0	46,182	11,076
11	3,286	3,172	15160,0	69,319	16,397
12	3,714	3,570	21090,0	96,433	21,829
13	4,143	3,953	27680,0	126,566	27,451
14	4,571	4,332	34840,0	159,305	33,363
15	5,000	4,709	42420,0	193,964	38,650

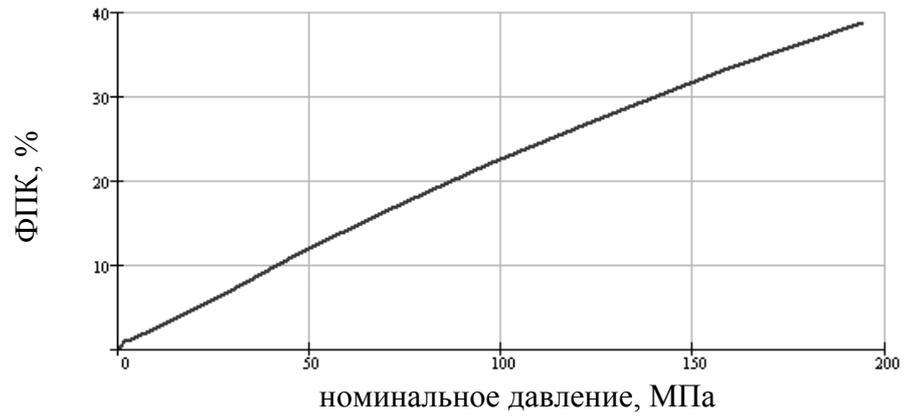


Рис. П1.1. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №1 и №2

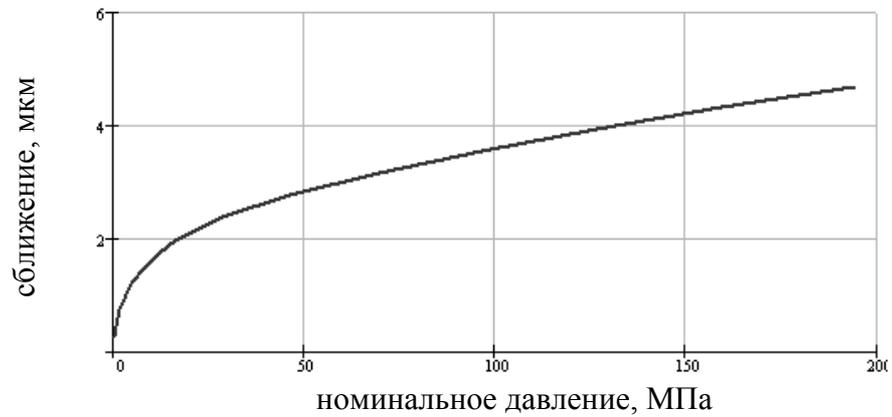


Рис. П1.2. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №1 и №2

Таблица 1.2

Результаты решения для моделей с поверхностями №1 и №3

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, $\text{Н} \cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	2,000	1,992	1190,0	5,441	0,904
2	2,250	2,238	1686,0	7,809	1,138
3	2,500	2,484	2309,0	10,558	1,461
5	3,000	2,973	3968,0	18,144	2,298
7	3,500	3,458	6158,0	28,157	3,023
9	4,000	3,939	8861,0	40,517	4,016
11	4,500	4,417	12130,0	55,464	5,209
13	5,000	4,890	16020,0	6,838	6,838
15	5,500	5,359	20550,0	93,964	8,634
17	6,000	5,824	25690,0	117,467	10,742
19	6,500	6,285	31360,0	143,393	12,850
21	7,000	6,742	37560,0	171,742	15,527

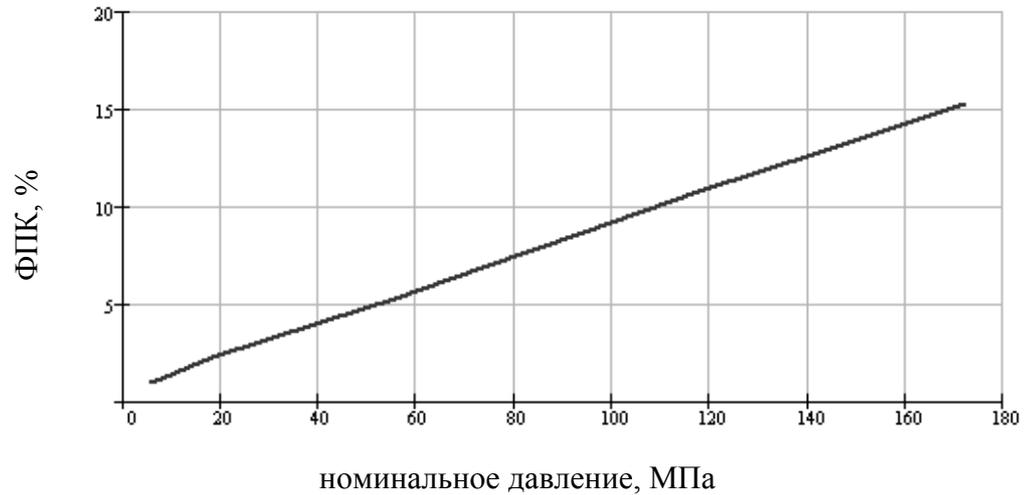


Рис. П1.3. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №1 и №3

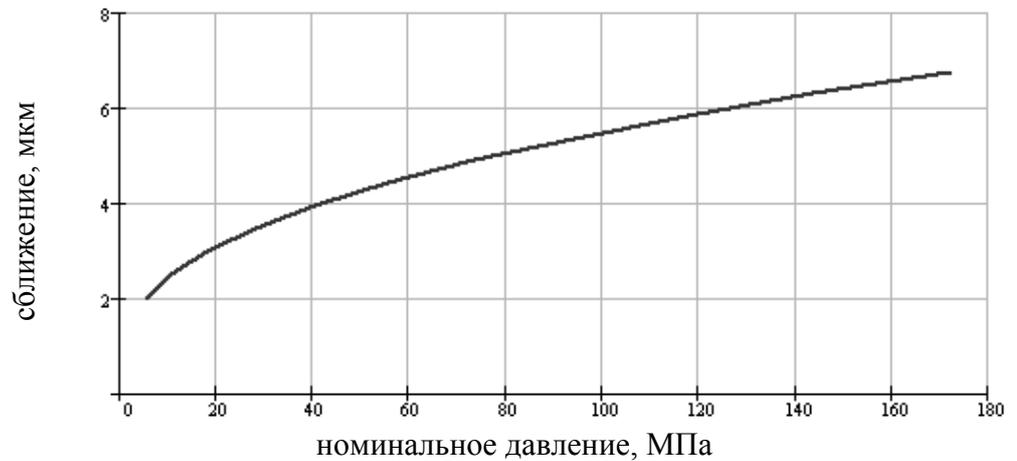


Рис. П1.4. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №1 и №3

Таблица 1.3

Результаты решения для моделей с поверхностями №1 и №4

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, $\text{H} \cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	2,000	1,998	279,0	1,276	0,223
2	2,450	2,446	537,0	2,455	0,491
4	3,350	3,340	1440,0	6,584	0,982
6	4,250	4,230	2847,0	13,018	1,640
8	5,150	5,117	4880,0	22,314	2,253
10	6,050	5,997	7770,0	35,527	3,536
12	6,950	6,869	11870,0	54,275	5,231
14	7,850	7,734	16980,0	77,641	7,117
16	8,750	8,593	22890,0	104,664	8,935
18	9,650	9,446	29680,0	135,711	11,143
20	10,550	10,294	37270,0	170,416	13,218

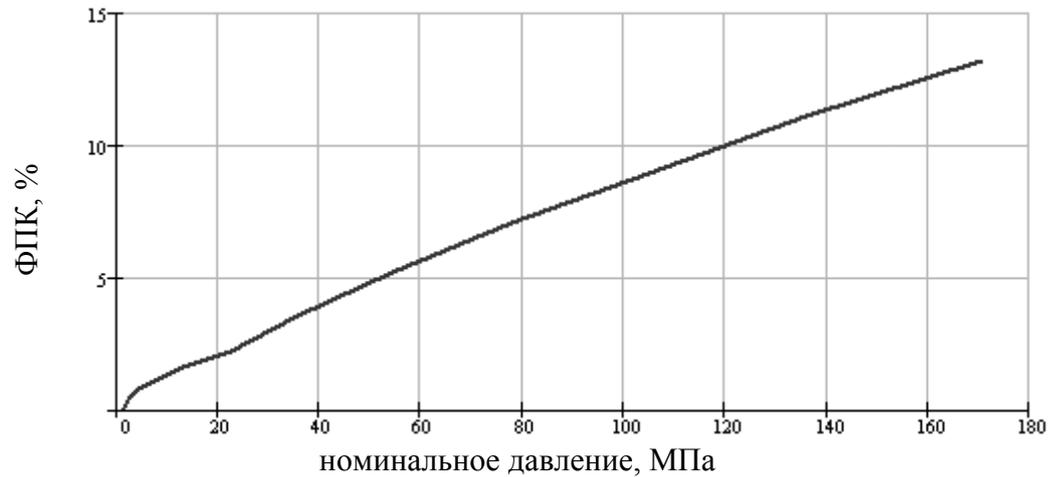


Рис. П1.5. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №1 и №4

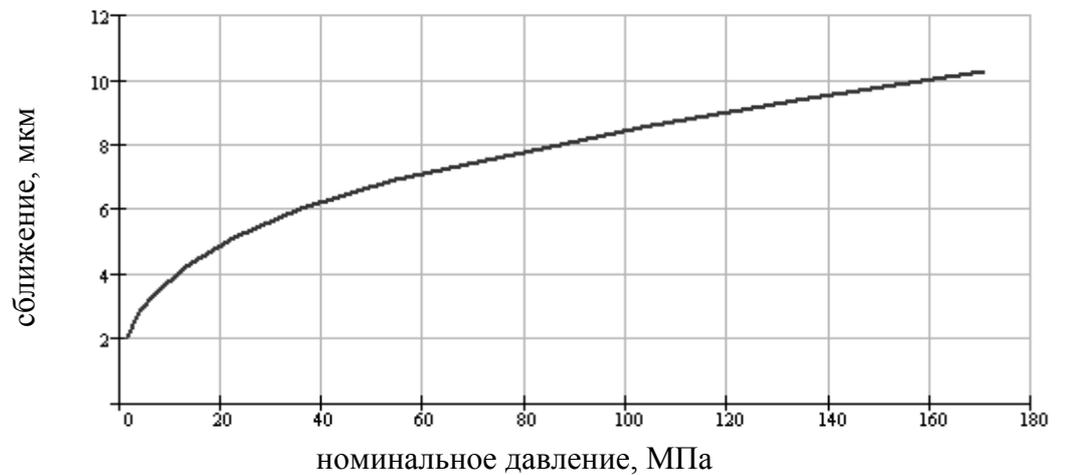


Рис. П1.6. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №1 и №4

Таблица 1.4

Результаты решения для моделей с поверхностями №2

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,400	0,339	83,7,0	0,383	0,223
2	0,800	0,797	419,1	1,916	0,669
4	1,600	1,585	2192,0	10,023	2,209
6	2,250	2,215	5125,0	23,434	4,830
8	2,750	2,692	8520,0	38,957	7,630
10	3,250	3,161	13030,0	59,579	11,668
12	3,750	3,622	18610,0	85,094	16,029
14	4,250	4,078	25050,0	114,540	20,736
16	4,750	4,530	32120,0	146,868	25,075
18	6,500	6,087	39720,0	275,446	39,074
20	7,000	6,528	68820,0	314,678	42,309

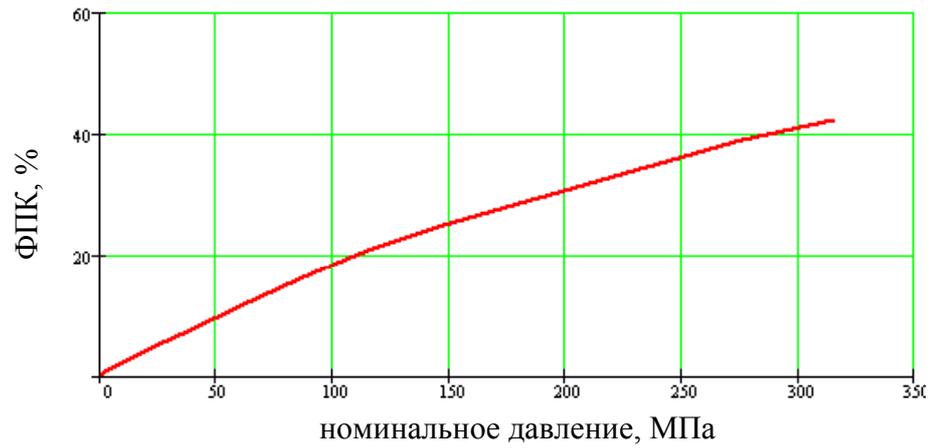


Рис. П1.7. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №2

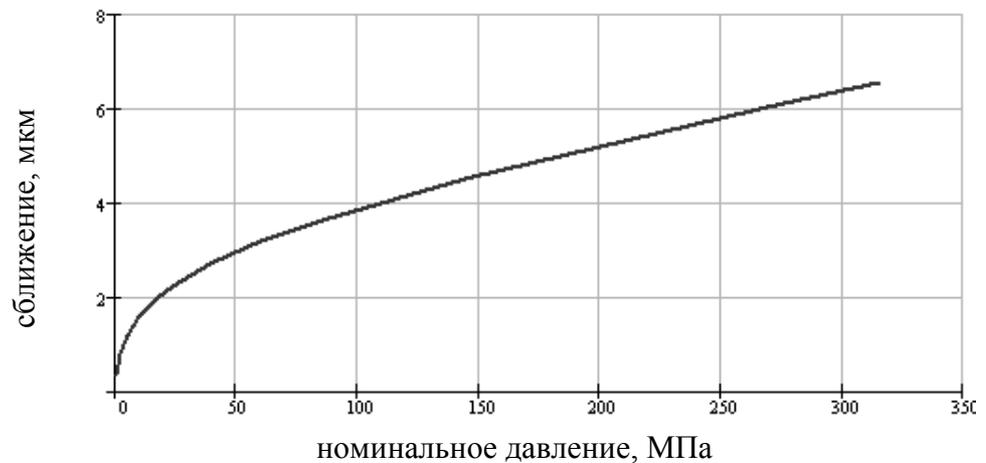


Рис. П1.8. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №2

Таблица 1.5

Результаты решения для моделей с поверхностями №2 и №3

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, $H \cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,667	0,666	39,5	0,180	0,045
2	1,333	1,332	200,4	0,916	0,167
3	2,000	1,996	526,1	2,406	0,279
4	2,333	2,328	777,8	3,556	0,379
5	2,667	2,659	1127,0	5,153	0,591
6	3,000	2,989	1609,0	7,357	0,848
8	3,667	3,646	3062,0	14,001	1,450
10	4,333	4,297	5305,0	24,257	2,342
12	5,000	4,942	8513,0	38,925	3,848
14	5,667	5,578	12920,0	59,076	5,633
16	6,333	6,207	18400,0	84,134	7,920
18	7,000	6,828	25080,0	114,678	10,943

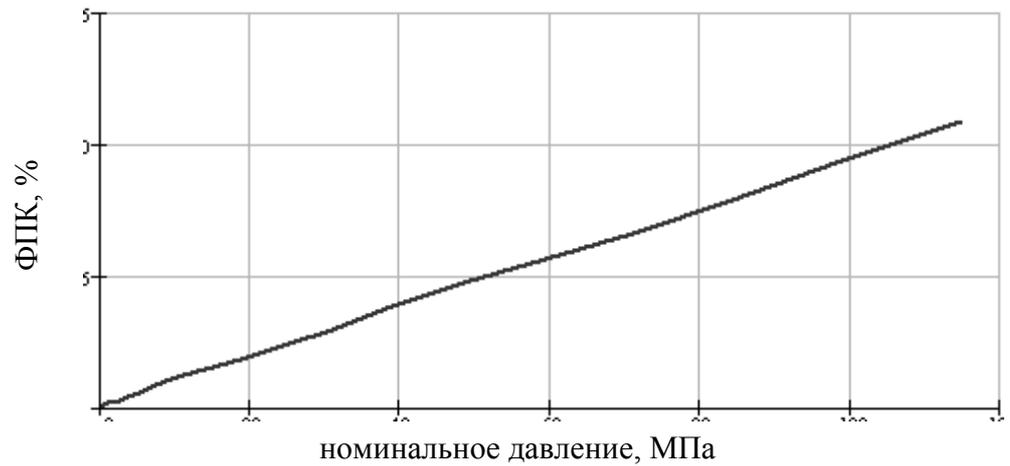


Рис. П1.9. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №2 и №3

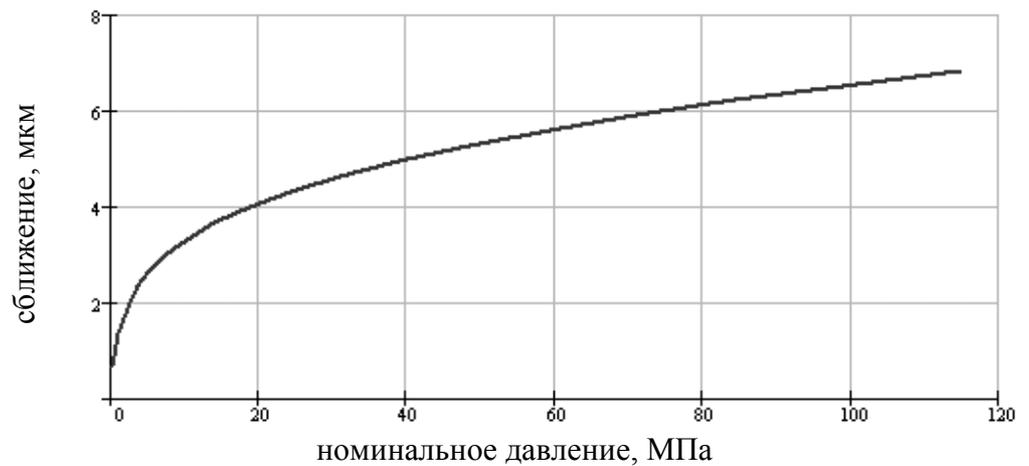


Рис. П1.10. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №2 и №3

Таблица 1.6

Результаты решения для моделей с поверхностями №2 и №4

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, $\text{Н} \cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	1,000	0,998	329,0	1,504	0,312
2	2,000	1,990	1394,0	6,374	0,915
3	2,429	2,413	2219,0	10,146	1,405
4	2,857	2,834	3376,0	15,437	1,952
5	3,286	3,253	4807,0	21,980	2,554
6	3,714	3,670	6518,0	29,803	3,112
8	4,571	4,499	10620,0	48,560	4,116
10	5,429	5,322	15570,0	71,193	5,432
12	6,286	6,136	21840,0	99,863	7,730
14	7,143	6,940	29640,0	135,528	10,151
16	8,000	7,734	38720,0	177,046	12,683

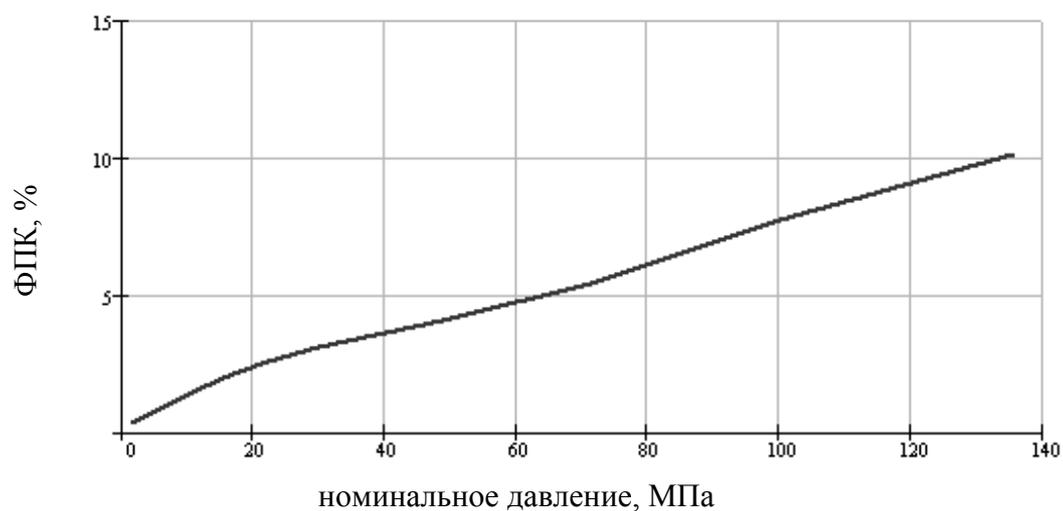


Рис. П1.11. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №2 и №4

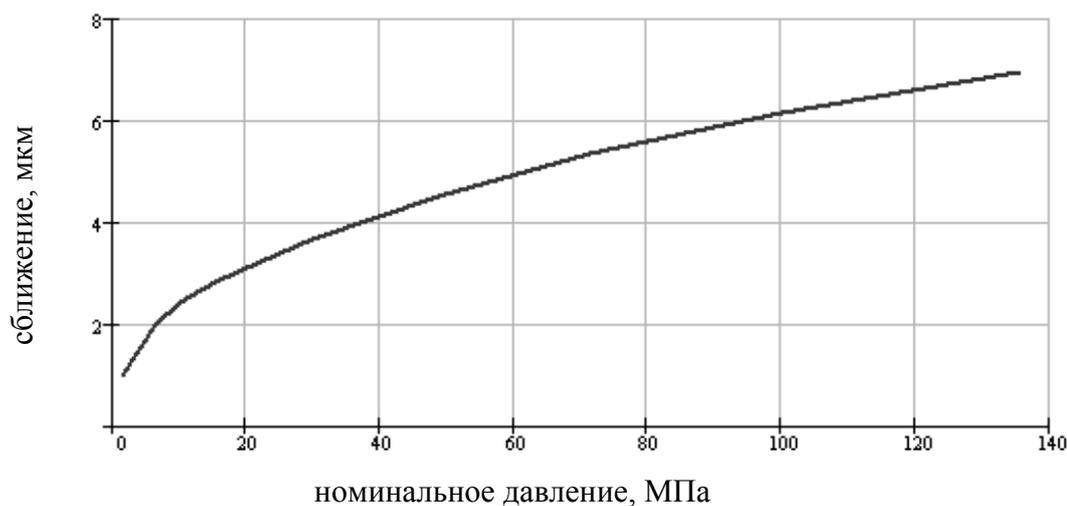


Рис. П1.12. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №2 и №4

Таблица 1.7

Результаты решения для моделей с поверхностями №3

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, $\text{Н} \cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
3	0,600	0,600	54,4	0,249	0,045
5	1,000	0,999	128,5	0,588	0,089
7	1,400	1,398	254,1	1,162	0,167
9	1,800	1,797	485,9	2,222	0,257
10	2,000	1,996	625,9	2,862	0,290
11	2,625	2,616	1278,0	5,844	0,613
12	3,250	3,233	2453,0	11,216	1,082
13	3,875	3,845	4334,0	19,817	1,863
14	4,500	4,451	7195,0	32,899	2,945
16	5,750	5,638	16400,0	74,989	6,202
18	7,000	6,796	29770,0	136,123	9,950

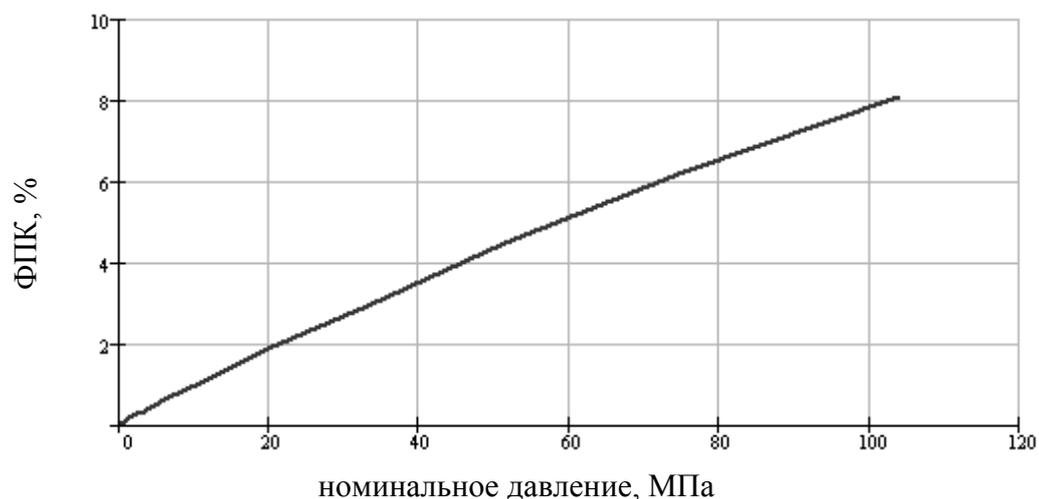


Рис. П1.13. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления

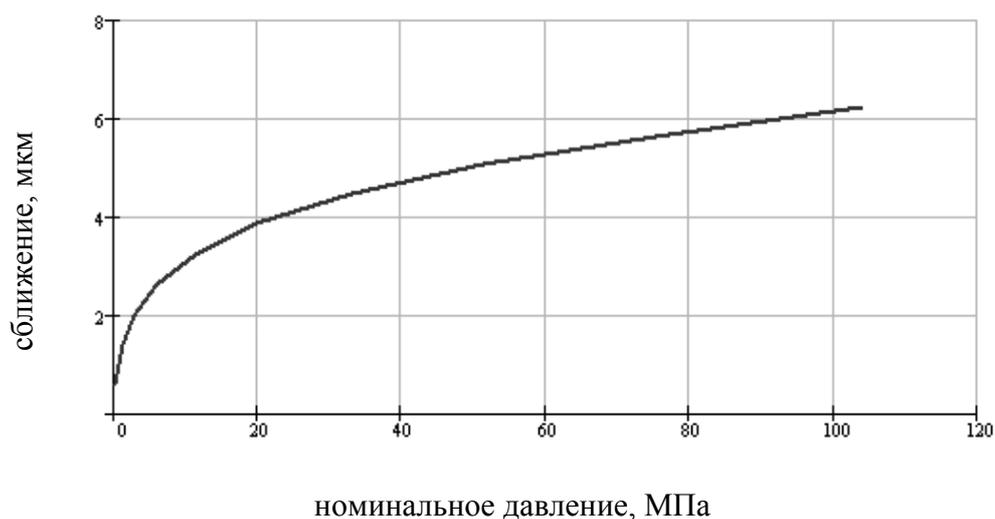


Рис. П1.14. Зависимость сближения от номинального давления

Таблица 1.8

Результаты решения для моделей с поверхностями №3 и №4

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение a , мкм	Контактная сила, $\text{Н} \cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
2	1,000	0,998	313,0	1,431	0,190
4	2,000	1,993	956,0	4,371	0,480
6	3,000	2,985	2126,0	9,721	0,892
8	4,000	3,974	3850,0	17,604	1,327
10	5,000	4,698	6380,0	21,172	2,153
12	6,000	5,931	10120,0	46,273	3,324
14	7,000	6,897	15010,0	68,633	4,596
16	8,000	7,856	20980,0	95,930	6,090
17	8,800	8,611	27600,0	126,200	7,775
18	9,600	9,358	35230,0	161,088	9,738

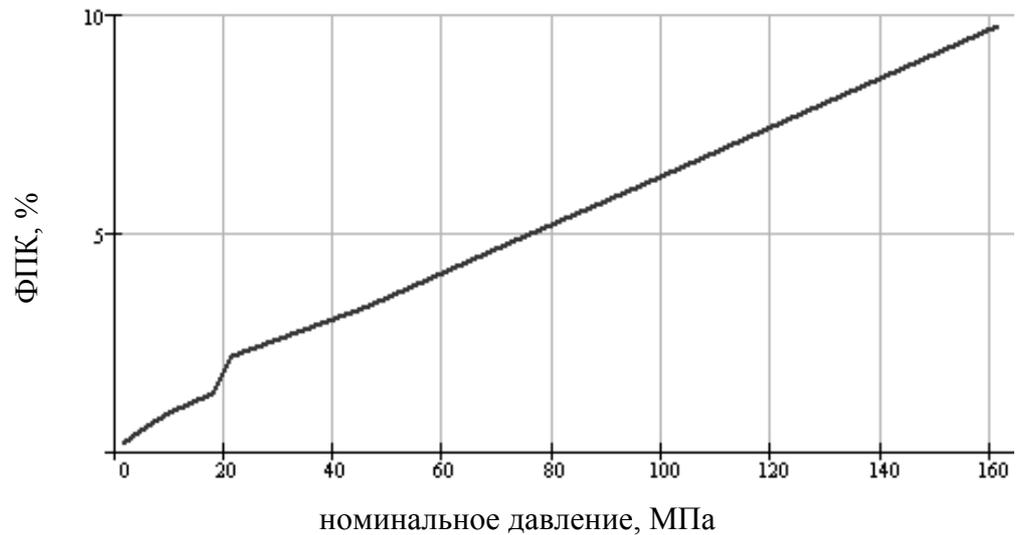


Рис. П1.15. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №3 и №4

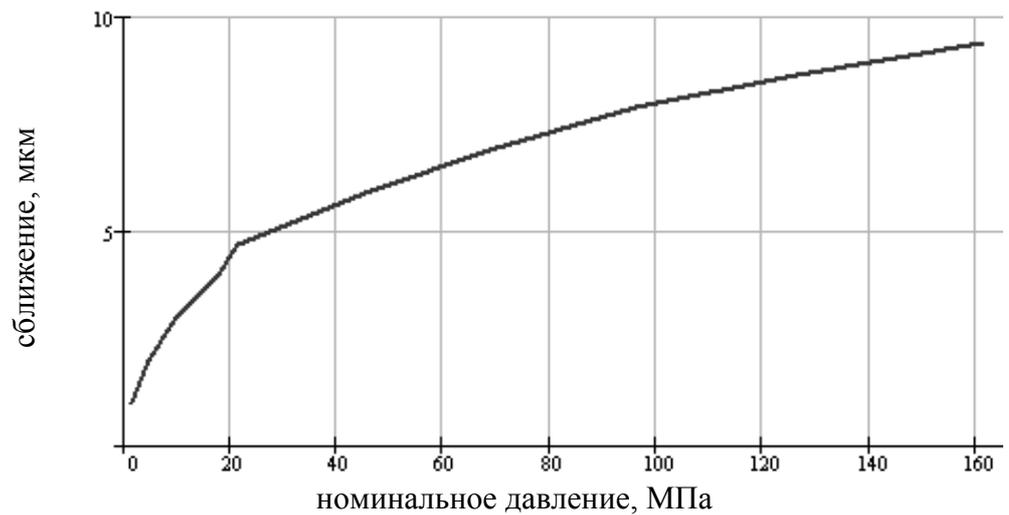


Рис. П1.16. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №3 и №4

Таблица 1.9

Результаты решения для моделей с поверхностями №4

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактная сила, $\text{Н} \cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	1,000	1,000	34,0	0,156	0,033
2	2,000	1,998	220,0	1,007	0,167
3	2,556	2,551	636,0	2,910	0,457
4	3,111	3,101	1419,0	6,488	0,892
5	3,667	3,638	2655,0	12,140	1,517
6	4,222	4,193	4239,0	19,383	2,119
8	4,778	4,718	8708,0	38,817	3,547
10	5,889	5,787	14800,0	67,673	5,276
12	7,000	6,845	22560,0	103,155	7,529
14	8,111	7,891	32080,0	146,685	9,983
16	9,222	8,923	43640,0	199,543	13,341

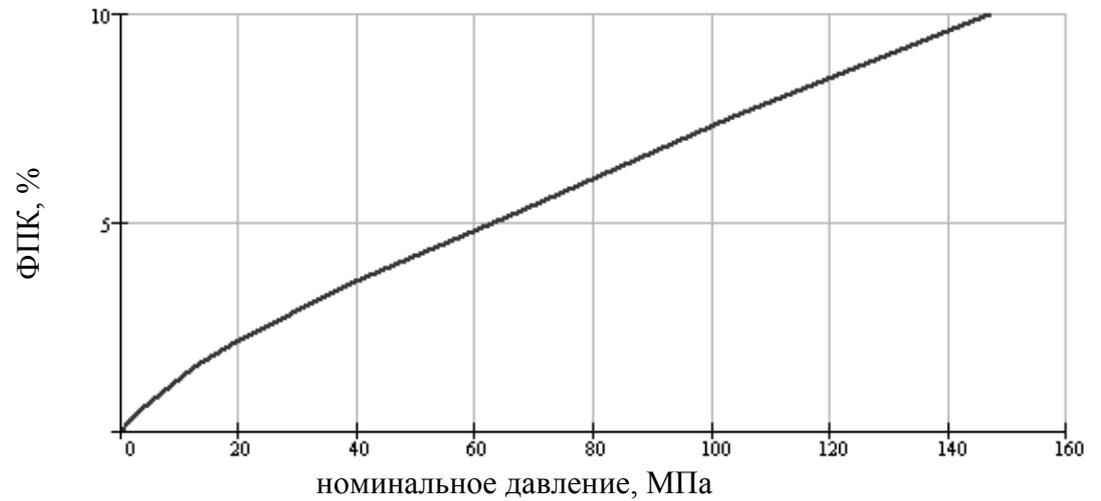


Рис. П1.17. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №4

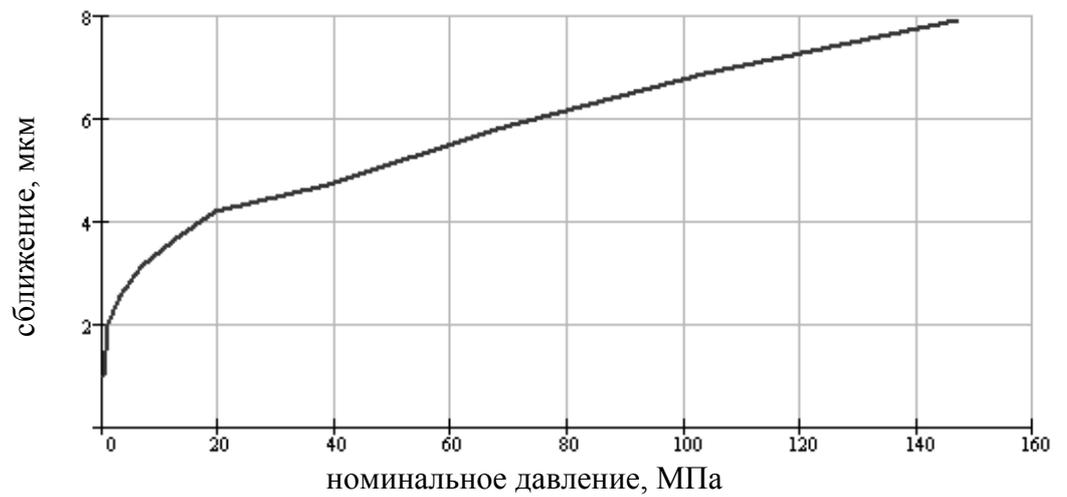


Рис. П1.18. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №4

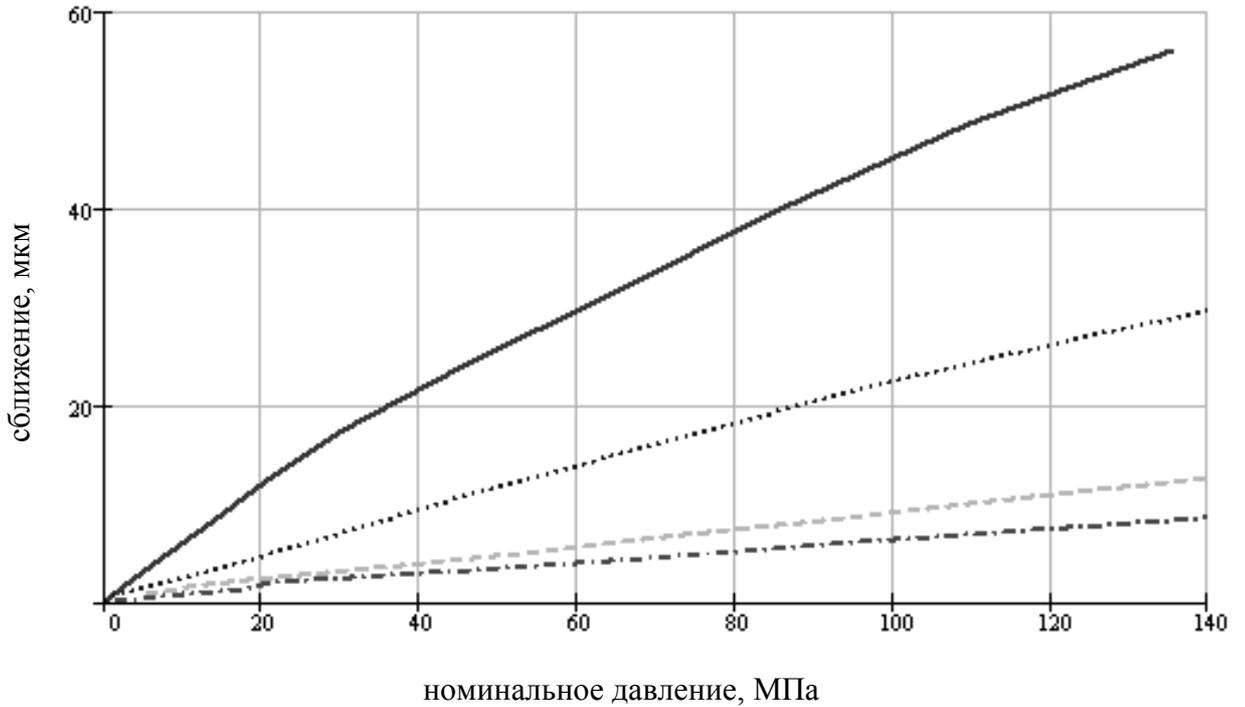
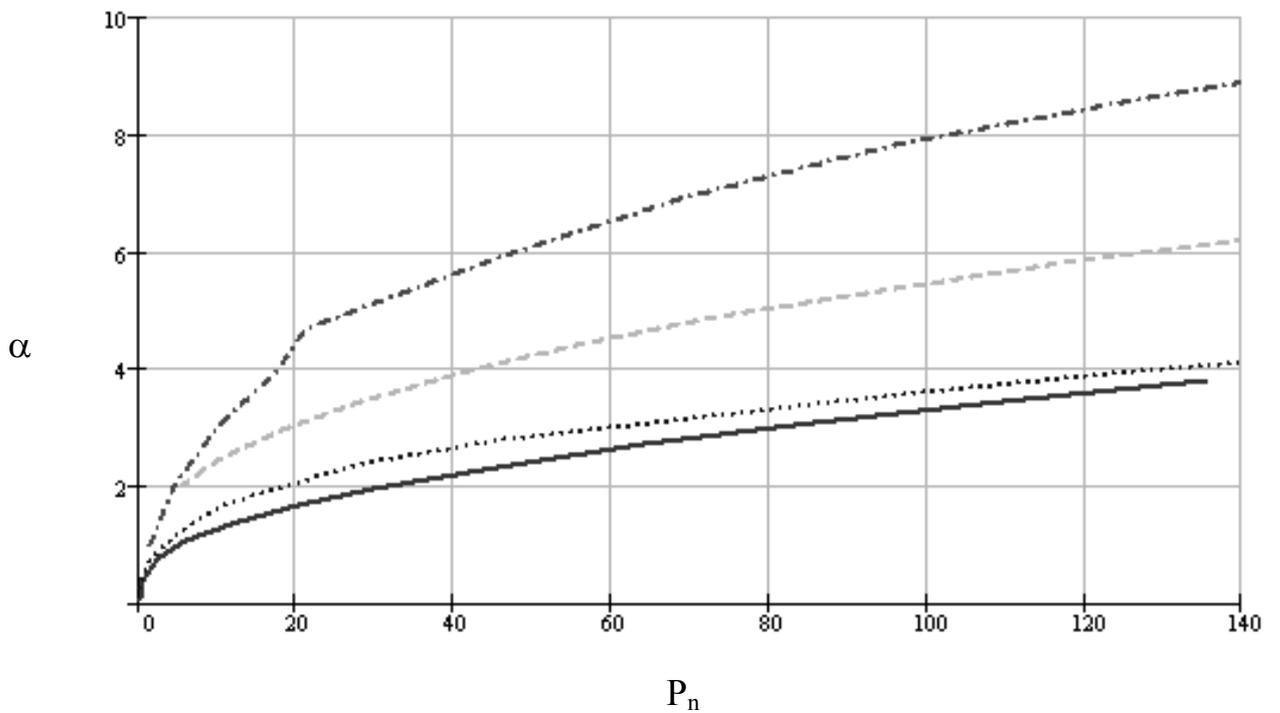


Рис. П1.19. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для различных пар поверхностей

поверхности №1
 поверхности №1 и №2
 поверхности №3 и №4
 поверхности №4



- поверхности №1
 - поверхности №1 и №2
 - поверхности №1 и №3
 - поверхности №1 и №4

Рис. П1.20. Зависимость сближения от номинального давления для различных пар поверхностей

П2 Результаты решения контактной задачи в упруго-пластической постановке с использованием базовых моделей

В табл. 2.1-2.7 приведены результаты решения упругой контактной задачи для базовых моделей. Поскольку сведения о податливости шероховатого слоя могут представлять практическую ценность, приведены данные для каждого шага нагружения. На рис. П2.1-П2.14 приведены графики зависимости фактической площади контакта от номинального давления в контакте, а также графики зависимости сближения тел, обусловленного шероховатостью поверхностей, от номинального давления (силовые характеристики шероховатого слоя). В табл. 2.8 приведены значения коэффициентов, использованных в аппроксимирующих выражениях для различных пар контактирующих поверхностей. Номера поверхностей в таблицах и на рисунках соответствуют табл. 3.2 из основной части диссертации.

Таблица 2.1

Результаты решения для моделей с поверхностями №1.

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,188	0,187	27,1	0,1238	0,145
2	0,375	0,374	107,6	0,492	0,446
3	0,563	0,561	231,2	1,057	0,959
4	0,750	0,747	445,3	2,036	1,785
5	0,938	0,932	780,4	3,568	3,101
6	1,125	1,116	1251,0	5,720	5,153
7	1,313	1,300	1872,0	8,560	7,864
8	1,500	1,482	2663,0	12,180	11,380
9	1,688	1,663	3560,0	16,280	15,230
10	1,875	1,844	4534,0	20,730	19,250
11	2,063	2,025	5453,0	24,930	22,940
12	2,250	2,206	6367,0	29,110	26,980
13	2,438	2,388	7250,0	33,150	30,800
14	2,625	2,569	8130,0	37,170	34,720
15	2,813	2,750	9053,0	41,390	38,840

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н·10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
17	3,188	3,112	11030,0	50,430	47,360
18	3,375	3,293	11990,0	54,820	51,960
19	3,563	3,474	12940,0	59,170	56,170
20	3,750	3,655	13810,0	63,150	59,750
21	3,938	3,837	14620,0	66,850	63,310
22	4,125	4,020	15380,0	70,320	66,570
23	4,313	4,202	16120,0	73,710	69,550
24	4,500	4,385	16830,0	76,950	72,410
25	4,688	4,567	17530,0	80,160	75,150
26	4,875	4,750	18220,0	83,310	77,700
27	5,063	4,933	18890,0	86,370	79,600
28	5,250	5,116	19560,0	89,440	81,580
29	5,438	5,299	20220,0	92,460	83,460
30	5,625	5,482	20880,0	95,470	84,810
31	5,813	5,665	21530,0	98,45	86,220
32	6,000	5,848	22180,0	101,40	87,440
32	7,000	6,649	51210,0	234,20	78,860

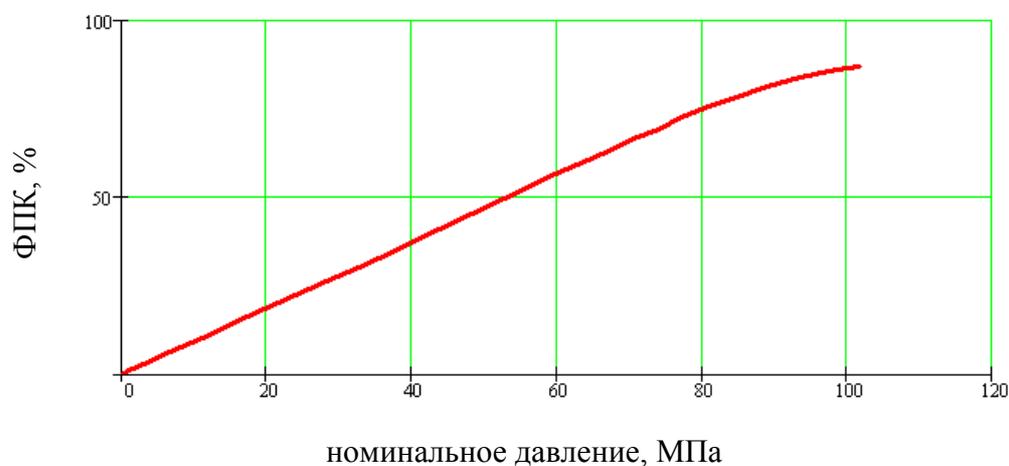


Рис. П2.1. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №1 и №2

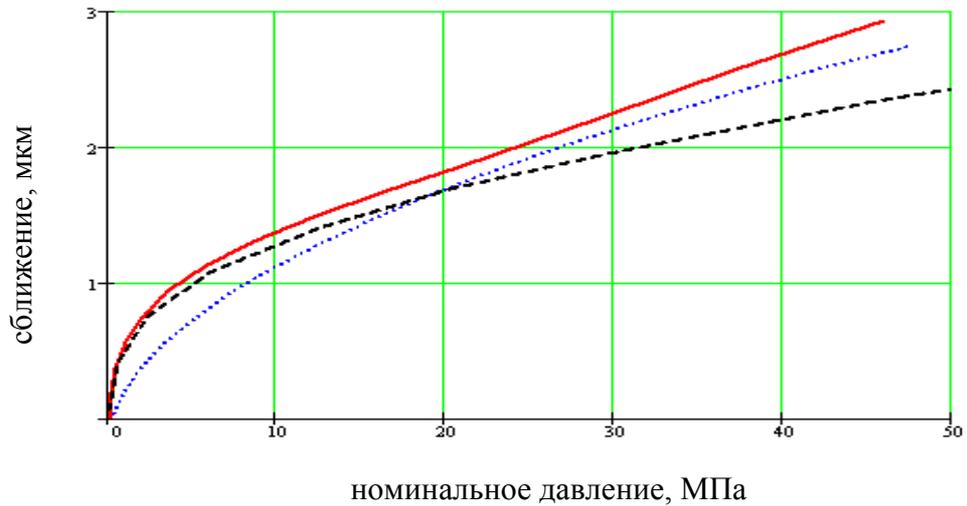


Рис. П2.2. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №1

Таблица 2.2

Результаты решения для моделей с поверхностями №1 и №3.

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,281	0,281	21,6	0,099	0,045
2	0,563	0,562	46,2	0,211	0,078
3	0,844	0,843	83,9	0,384	0,134
4	1,125	1,124	133,7	0,611	0,234
5	1,406	1,404	269,2	1,231	0,413
6	1,688	1,685	431,4	1,973	0,669
7	1,969	1,964	647,7	2,962	0,937
8	2,250	2,244	941,6	4,305	1,361
9	2,531	2,522	1304,0	5,963	1,751
10	2,813	2,800	1768,0	8,084	2,309
11	3,094	3,078	2313,0	10,580	2,867
12	3,375	3,355	2889,0	13,210	3,514
13	3,656	3,632	3582,0	16,380	4,205
14	3,938	3,907	4412,0	20,170	5,187
15	4,219	4,182	5369,0	24,550	6,336
16	4,500	4,455	6512,0	29,780	7,585
17	4,781	4,727	7838,0	35,840	9,292
18	5,063	4,999	9311,0	42,570	10,910
19	5,344	5,269	10960,0	50,110	12,780
20	5,625	5,538	12710,0	58,120	14,840
21	5,906	5,807	14530,0	66,440	16,820
22	6,188	6,075	16470,0	75,310	19,060
23	6,469	6,342	18500,0	84,590	21,260

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
24	6,750	6,608	20650,0	94,420	23,510
25	7,031	6,874	22930,0	104,800	26,000
26	7,313	7,139	2530,0	115,700	28,340
27	7,594	7,403	27770,0	127,000	31,010
28	7,875	7,667	30350,0	138,800	33,490
29	8,156	7,930	33020,0	151,000	36,040
30	8,438	8,192	3580,0	163,700	38,850
31	8,719	8,453	38680,0	176,900	41,520
32	9,000	8,714	41650,0	190,400	44,660

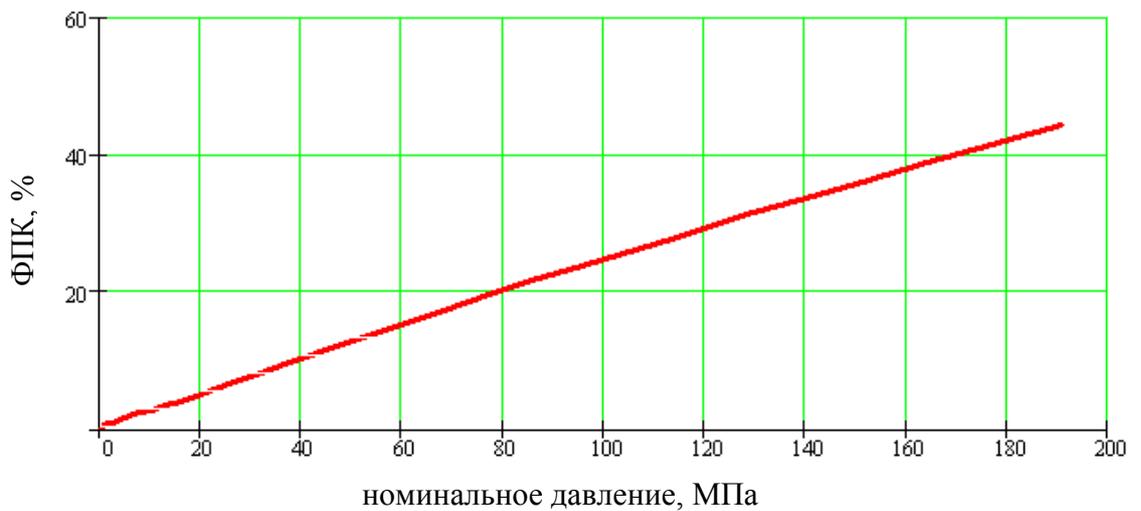


Рис. П2.3 Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №1 и №3

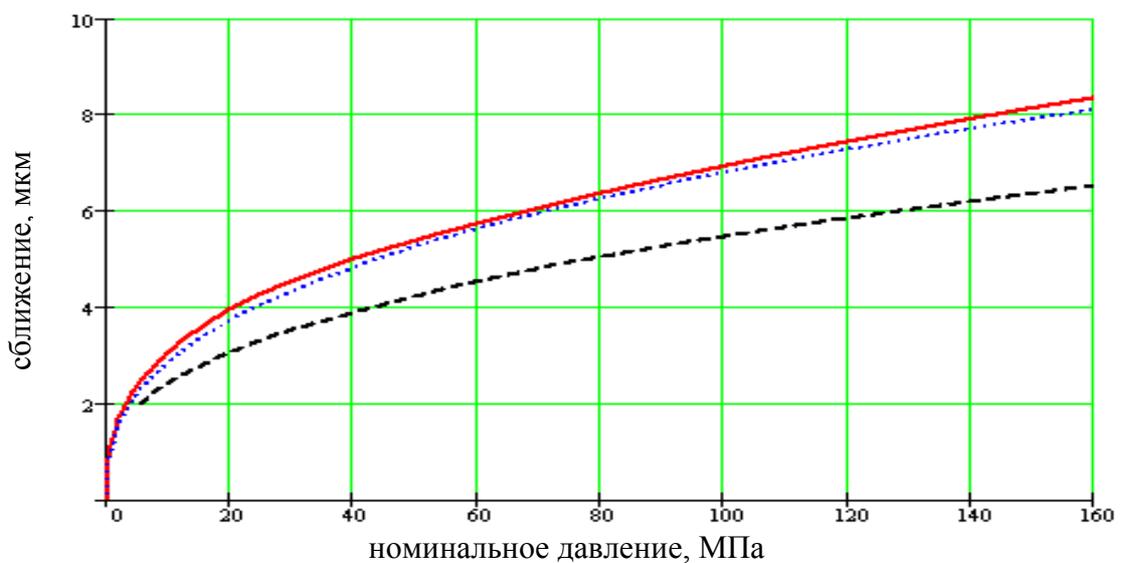


Рис. П2.4. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №1 и №3

Результаты решения для моделей с поверхностями №1 и №4.

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,281	0,281	13,3	0,061	0,011
2	0,563	0,562	18,7	0,085	0,022
3	0,844	0,843	45,9	0,210	0,045
4	1,125	1,125	67,5	0,309	0,067
5	1,406	1,406	99,1	0,453	0,089
6	1,688	1,686	147,8	0,676	0,212
7	1,969	1,967	290,4	1,328	0,435
8	2,250	2,247	481,2	2,200	0,714
9	2,531	2,527	677,1	3,096	0,937
10	2,813	2,806	877,4	4,012	1,127
11	3,094	3,086	1134,0	5,185	1,428
12	3,375	3,365	1445,0	6,607	1,774
13	3,656	3,644	1786,0	8,166	2,131
14	3,938	3,923	2132,0	9,749	2,331
15	4,219	4,201	2528,0	11,560	2,822
16	4,500	4,479	3060,0	13,990	3,469
17	4,781	4,756	3687,0	16,860	4,083
18	5,063	5,032	4468,0	20,430	5,086
19	5,344	5,307	5341,0	24,420	6,023
20	5,625	5,582	6321,0	28,900	7,139
21	5,906	5,856	7345,0	33,580	8,120
22	6,188	6,130	8399,0	38,400	9,214
23	6,469	6,404	9482,0	43,360	10,310
24	6,750	6,677	1060,0	48,470	11,340
25	7,031	6,951	11770,0	53,820	12,540
26	7,313	7,223	13030,0	59,580	13,800
27	7,594	7,495	14340,0	65,570	14,880
28	7,875	7,767	15710,0	71,830	16,020
29	8,156	8,039	17150,0	78,420	17,400
30	8,438	8,309	18680,0	85,410	18,950
31	8,719	8,581	20300,0	92,820	20,370
32	9,000	8,793	21220,0	98,720	21,420

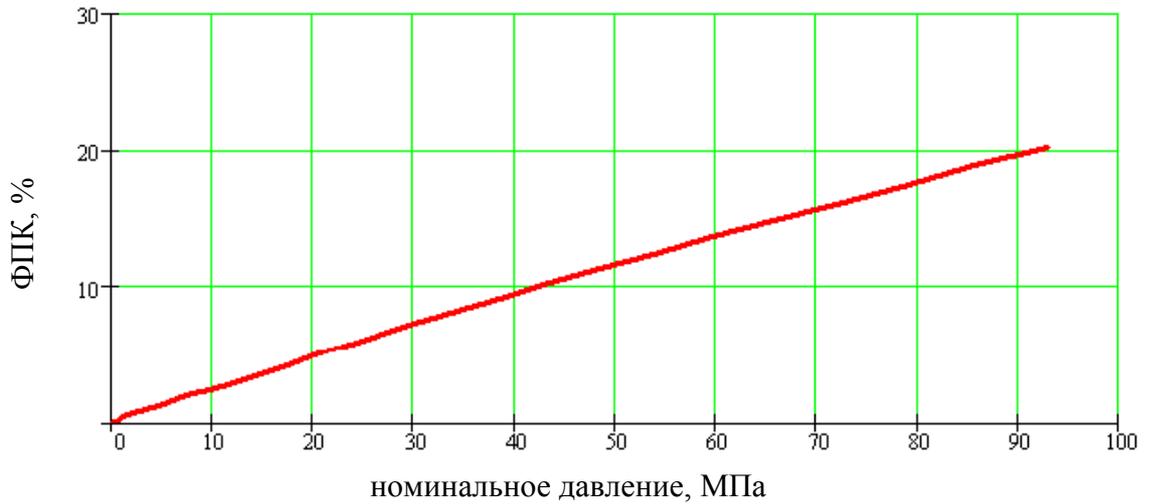


Рис. П2.5. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №1 и №4

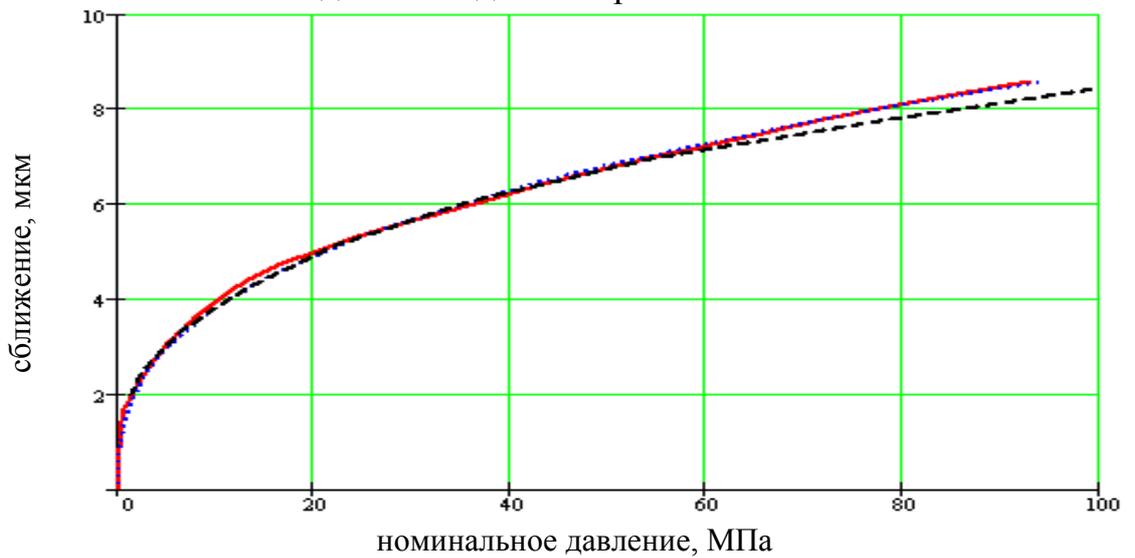


Рис. П2.6. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №1 и №4

Таблица 2.4

Результаты решения для моделей с поверхностями №2.

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,219	0,219	25,5	0,116	0,089
2	0,438	0,437	92,0	0,421	0,268
3	0,656	0,655	216,7	0,991	0,535
4	0,875	0,872	397,7	1,818	0,825
5	1,094	1,089	648,8	2,967	1,283
6	1,313	1,306	965,1	4,413	1,840
7	1,531	1,522	1347,0	6,159	2,387
8	1,750	1,738	1819,0	8,317	3,380

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
9	1,969	1,952	2442,0	11,170	4,439
10	2,188	2,165	3221,0	14,730	6,046
11	2,406	2,378	4115,0	18,820	7,619
12	2,625	2,590	5175,0	23,660	9,660
13	2,844	2,800	6393,0	29,230	12,100
14	3,063	3,009	7783,0	35,590	14,790
15	3,281	3,217	9311,0	42,570	17,660
16	3,500	3,425	10980,0	50,210	20,620
17	3,719	3,631	12730,0	58,210	23,630
18	3,938	3,841	14060,0	64,290	26,420
19	4,156	4,043	16530,0	75,580	29,310
20	4,375	4,248	18540,0	84,770	32,450
21	4,594	4,452	20680,0	94,560	35,810
22	4,813	4,656	22870,0	104,600	39,220
23	5,031	4,859	25100,0	114,800	42,020
24	5,250	5,062	27370,0	125,100	45,190
25	5,469	5,265	29690,0	135,800	48,000
26	5,688	5,468	32030,0	146,500	51,110
27	5,906	5,670	34430,0	157,400	53,940
28	6,125	5,872	36870,0	168,600	56,740
29	6,344	6,074	39360,0	180,000	59,420
30	6,563	6,275	41880,0	191,500	61,960
31	6,781	6,476	44440,0	203,200	64,310
32	7,000	6,677	47050,0	215,100	66,780

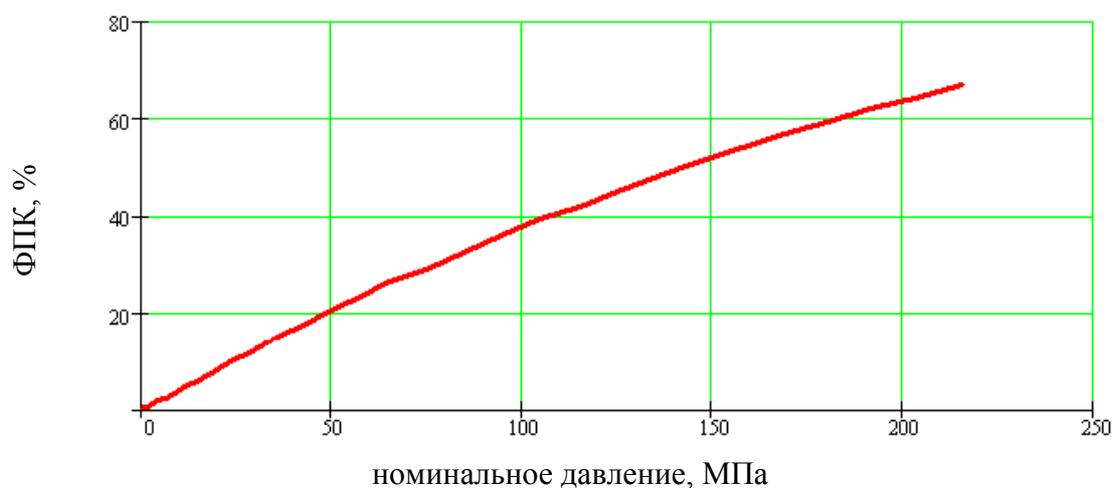


Рис. П2.7. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления для поверхностей №2

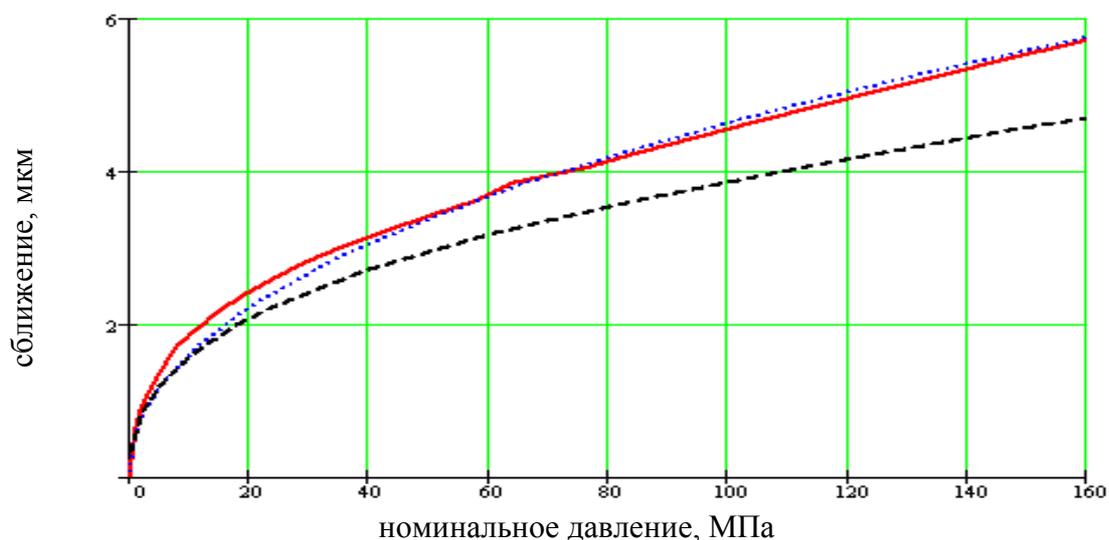


Рис. П2.8. Зависимость сближения от номинального давления для поверхностей №2

Таблица 2.5

Результаты решения для моделей с поверхностями №3.

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,281	0,281	19,3	0,088	0,033
2	0,563	0,562	36,3	0,166	0,045
3	0,844	0,843	55,5	0,254	0,067
4	1,125	1,124	87,7	0,401	0,112
5	1,406	1,405	128,4	0,587	0,179
6	1,688	1,686	211,1	0,965	0,257
7	1,969	1,967	285,6	1,306	0,312
8	2,250	2,247	388,5	1,776	0,435
9	2,531	2,528	535,7	2,449	0,580
10	2,813	2,808	716,0	3,274	0,803
11	3,094	3,087	966,2	4,418	1,127
12	3,375	3,366	1275,0	5,830	1,394
13	3,656	3,645	1665,0	7,613	1,874
14	3,938	3,923	2153,0	9,845	2,398
15	4,219	4,200	2750,0	12,570	2,989
16	4,500	4,476	3456,0	15,800	3,681
17	4,781	4,752	4299,0	19,660	4,763
18	5,063	5,026	5319,0	24,320	5,733
19	5,344	5,300	6313,0	28,870	6,548
20	5,625	5,573	7509,0	34,330	7,775
21	5,906	5,846	8828,0	40,370	9,046
22	6,188	6,117	10230,0	46,780	10,340

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
23	6,469	6,388	11750,0	53,7	11,800
24	6,750	6,658	13350,0	61,0	13,280
25	7,031	6,928	15110,0	69,1	15,000
26	7,313	7,196	16960,0	77,6	16,520
27	7,594	7,464	18900,0	86,4	18,620
28	7,875	7,731	20970,0	95,9	20,420
29	8,156	7,998	23090,0	105,6	22,220
30	8,438	8,264	25320,0	115,8	24,580
31	8,719	8,529	27670,0	126,5	26,550
32	9,000	8,793	30150,0	137,9	28,920

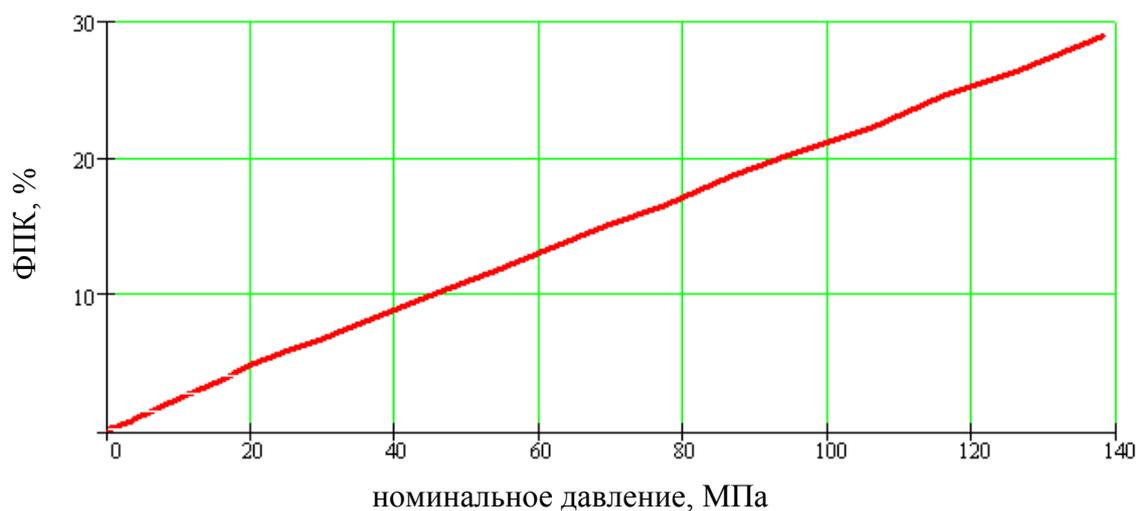


Рис. П2.9. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления

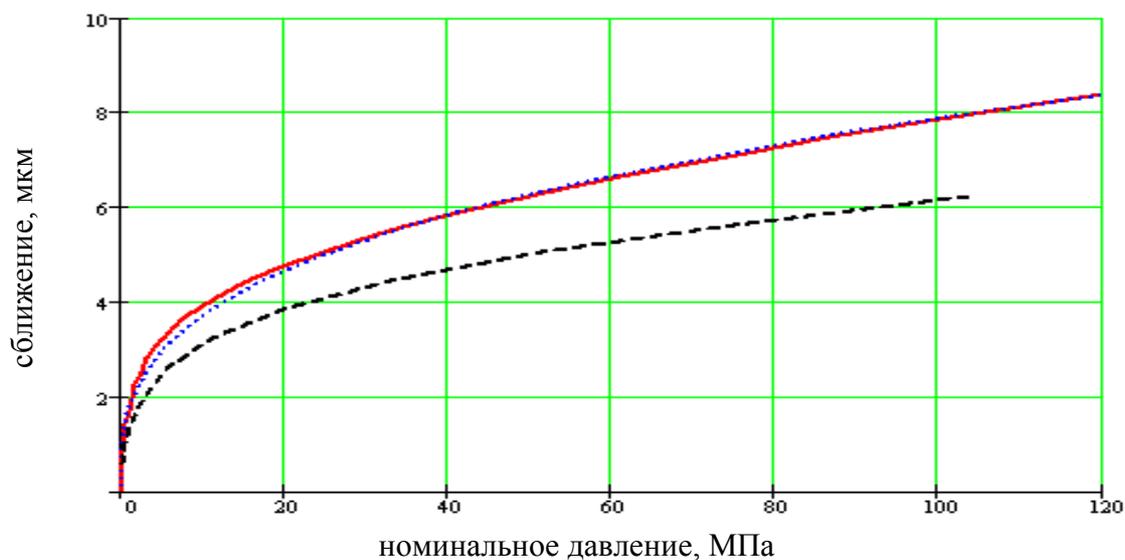


Рис. П2.10. Зависимость сближения от номинального давления

Результаты решения для моделей с поверхностями №4.

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,469	0,468	7,2	0,033	0,011
2	0,938	0,937	23,0	0,105	0,033
3	1,406	1,406	46,8	0,214	0,067
4	1,875	1,874	116,9	0,535	0,145
5	2,344	2,342	320,2	1,464	0,368
6	2,813	2,808	663,8	3,035	0,803
7	3,281	3,273	1145,0	5,235	1,361
8	3,750	3,738	1733,0	7,924	1,807
9	4,219	4,202	2440,0	11,160	2,521
10	4,688	4,665	3274,0	14,970	3,302
11	5,156	5,128	4173,0	19,080	4,071
12	5,625	5,589	5265,0	24,070	5,187
13	6,094	6,050	6374,0	29,140	6,168
14	6,563	6,510	7653,0	34,990	7,351
15	7,031	6,969	9129,0	41,740	8,767
16	7,500	7,427	10070,0	48,930	10,180
17	7,969	7,885	12260,0	56,060	11,530
18	8,438	8,341	14110,0	64,520	13,370
19	8,906	8,795	16200,0	74,070	15,100
20	9,375	9,248	18510,0	84,640	17,390
21	9,844	9,700	20910,0	95,610	19,480
22	10,310	10,150	23470,0	107,300	21,740
23	10,780	10,600	26150,0	119,600	23,870
24	11,250	11,050	29090,0	133,000	26,760
25	11,720	11,500	32380,0	148,100	29,510
26	12,190	11,940	35830,0	163,800	32,390
27	12,660	12,390	39350,0	179,900	34,950
28	13,130	12,830	43030,0	196,800	38,420
29	13,590	13,270	47050,0	215,100	41,480
30	14,060	13,710	51180,0	234,000	44,430

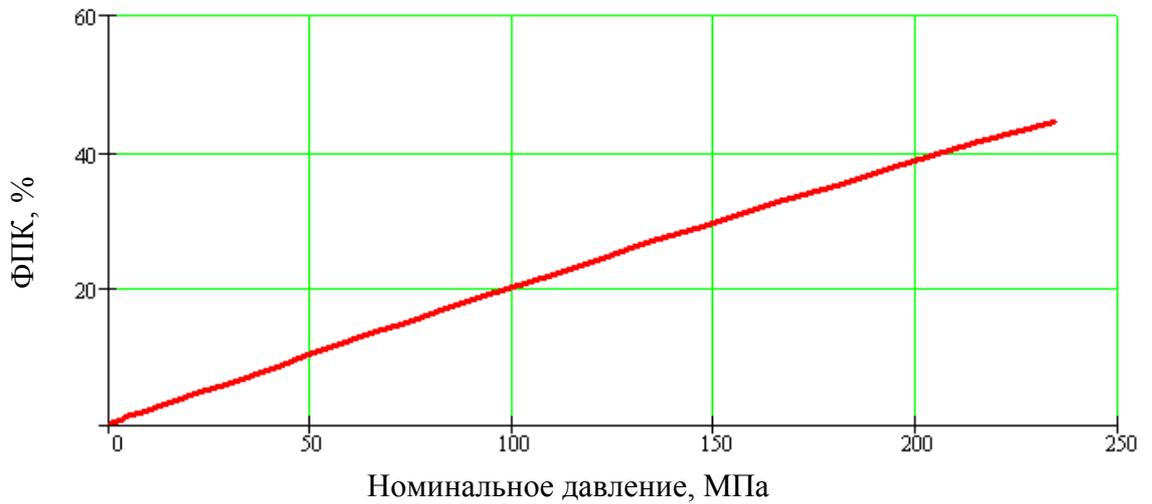


Рис. П2.11. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления

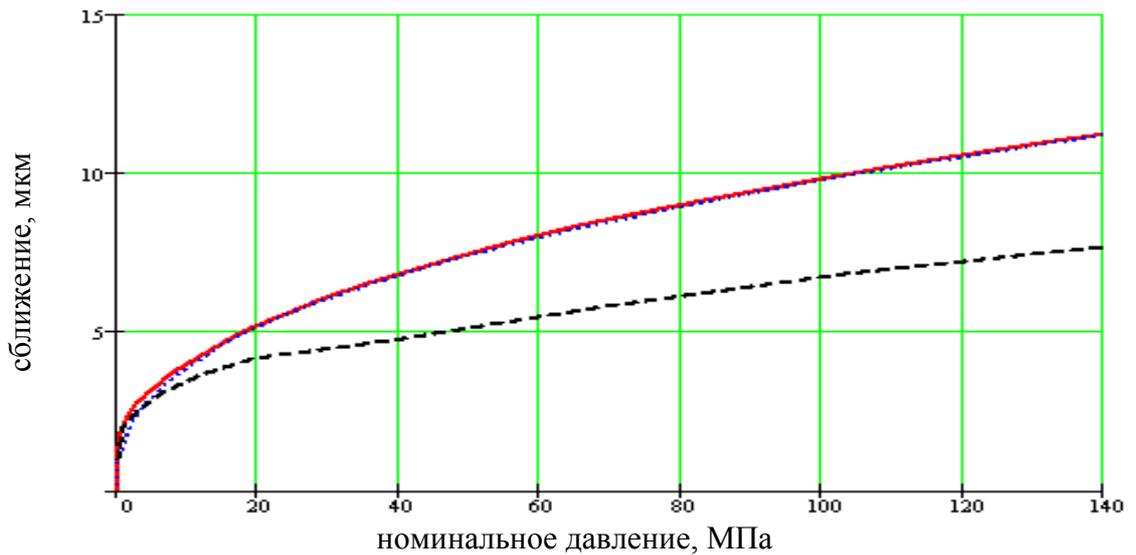


Рис. П2.12. Зависимость сближения от номинального давления

Таблица 2.7

Результаты решения для моделей с поверхностями №2 и №4.

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н $\cdot 10^3$	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
1	0,313	0,312	51,1	0,234	0,123
2	0,625	0,624	116,2	0,531	0,190
3	0,938	0,936	203,5	0,931	0,324
4	1,250	1,248	351,9	1,609	0,547
5	1,563	1,559	521,5	2,385	0,747
6	1,875	1,870	726,5	3,322	0,959
7	2,188	2,181	998,1	4,564	1,294
8	2,500	2,490	1399,0	6,397	1,740

№ шага нагружения	Δh , мкм	Сближение α , мкм	Контактное усилие P_c , Н · 10 ³	Номинальное давление p_n , МПа	Фактическая площадь контакта, %
9	2,813	2,800	1880,0	8,596	2,242
10	3,125	3,109	2391,0	10,930	2,744
11	3,438	3,417	2961,0	13,540	3,324
12	3,750	3,725	3583,0	16,380	3,848
13	4,063	4,034	4201,0	19,210	4,294
14	4,375	4,342	4832,0	22,090	4,819
15	4,688	4,650	5536,0	25,310	5,410
16	5,000	4,957	6279,0	28,710	6,191
17	5,313	5,264	7143,0	32,660	6,927
18	5,625	5,569	8100,0	37,040	7,909
19	5,938	5,874	9201,0	42,070	9,113
20	6,250	6,178	10520,0	48,100	10,400
21	6,563	6,481	11860,0	54,230	11,490
22	6,875	6,784	13270,0	60,680	12,950
23	7,188	7,086	14770,0	67,540	14,210
24	7,500	7,387	16420,0	75,080	15,970
25	7,813	7,688	18160,0	83,040	17,670
26	8,125	7,988	19970,0	91,310	19,060
27	8,438	8,287	21870,0	100,000	20,790
28	8,750	8,586	23860,0	109,000	22,610
29	9,063	8,885	25930,0	118,600	24,450
30	9,375	9,183	28060,0	128,300	26,170
31	9,688	9,480	30250,0	138,300	27,820
32	10,000	9,777	32500,0	148,600	29,830

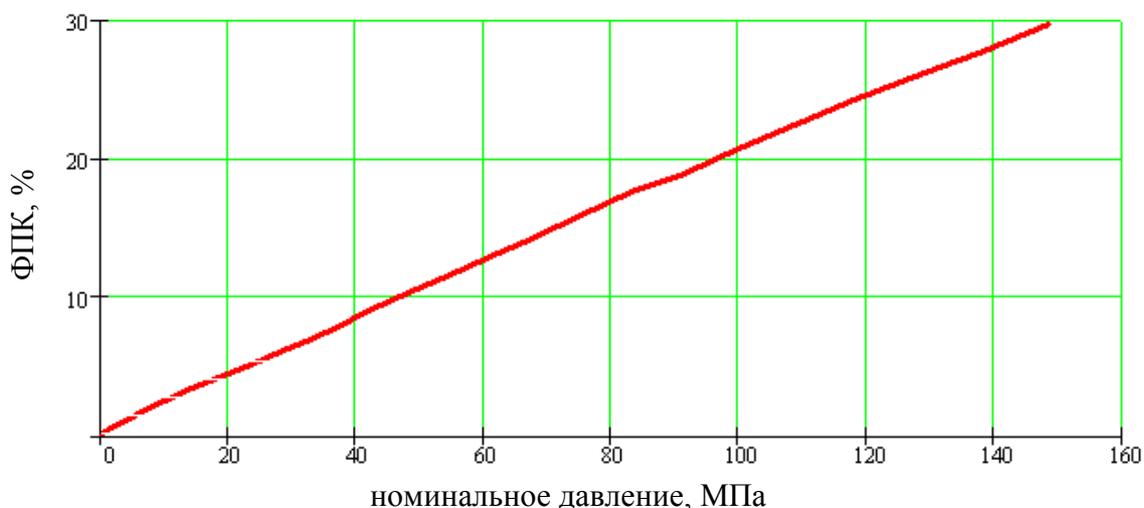


Рис. П2.13. Зависимость относительной фактической площади контакта от номинального давления

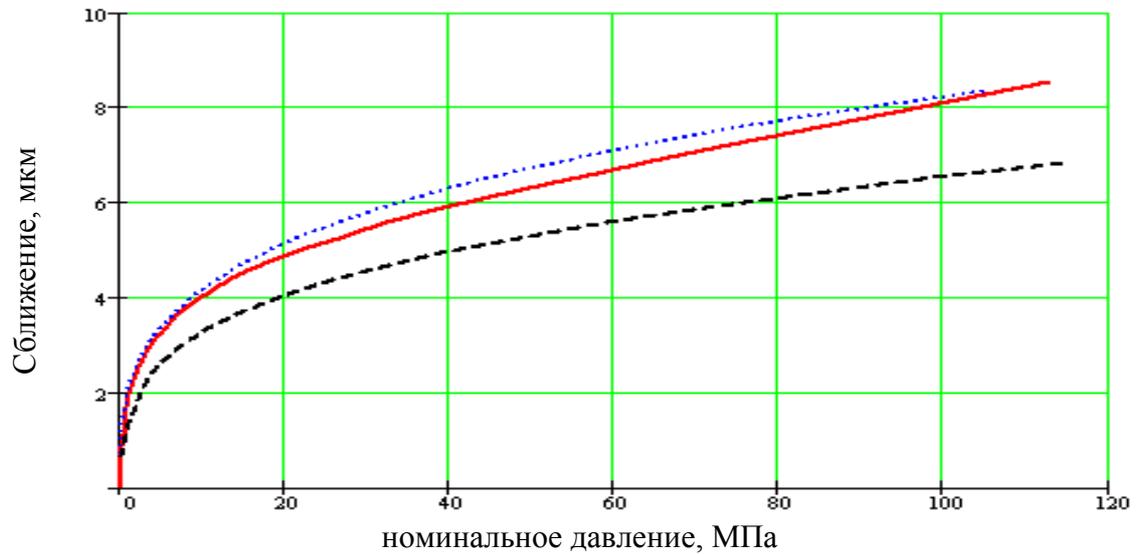


Рис. П2.14. Зависимость сближения от номинального давления

Таблица 2.8

Параметры аппроксимации силовой характеристики шероховатого слоя при решении упруго-пластической контактной задачи для базовых моделей

Поверхности, образующие контакт	$p = c\alpha^x$	
	c	x
№1	10,719	1,306
№1 и №2	2,431	2,433
№1 и №3	0,326	2,507
№1 и №4	0,245	2,769
№2	3,521	2,181
№3	1,862	0,318
№4	0,326	2,507
№2 и №4	0,608	2,412